



 Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti

Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Siano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $v(x, y) = (x^3, x^2y)$. Quanto fa $\int_D \operatorname{div}(v)$?

2. Qual è l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema $x' = x^3 t^2$, $x(0) = 1$?

3. Se $a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = -7$, quanto fa a_{100} ?

4. Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ha in 0 un polo di ordine 1, allora $f(z) - \frac{1}{z}$ è olomorfa su tutto \mathbb{C} ?

5. Calcolare $\int_{\partial\Delta(-1,2)} \frac{dz}{z(z-2i)}$.

6. Sia $f(t) = t^2$ per $t \in [-\pi, 0]$ e $f(t) = \cos(t)$ per $t \in (0, \pi]$.
 Sia α_n l' n -esimo coefficiente di Fourier complesso di f . Quanto fa $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$?

7. Calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})$ della funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$.

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥



1.

(A) (3 punti) Si trovi una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

(B) (3 punti) Si risolva il problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -2e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 2.$$

(Suggerimento: si cerchi una soluzione del tipo $x(t) = \alpha(t) \cdot e^t$).(C) (2 punti) Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $u' > 2u$ e $u(0) = 1$.Si provi che u è positiva su $(0, +\infty)$.(D) (2 punti) Sia x la soluzione del problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = \sin^2(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 5.$$

Si provi che la funzione $y = x' - 2x$ è positiva su $(0, +\infty)$.(Suggerimento: si cerchi un problema di Cauchy risolto da y).(E) (2 punti) Si deduca dai punti (C) e (D) che la x del punto (D) è positiva su $(0, +\infty)$.2. Si consideri la funzione $f(z) = \frac{1}{e^{\sin(z)} - 1}$.(A) (3 punti) Si trovino le singolarità di f sull'asse reale, e se ne discuta il tipo.(B) (3 punti) Si trovino le singolarità di f fuori dall'asse reale, e se ne discuta il tipo.(C) (3 punti) Sia R il rettangolo di vertici $-7\pi/2 - i$, $7\pi/2 - i$, $7\pi/2 + i$, $-7\pi/2 + i$.Si calcoli $\int_{\partial R} f(z) dz$.(D) (3 punti) Si calcoli $\int_{\partial R} \frac{\cos(z) \cdot e^{\sin(z)}}{e^{\sin z} - 1} dz$.



Risposte esatte

5. \diamond

1. π .
2. $(-\infty, (3/2)^{1/3})$.
3. $3^{100} - 4^{100}$.
4. Solo se il residuo è 1, altrimenti no.
5. $-\pi$.
6. $1/2$.
7. $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(x) = \frac{2 \sin(x)}{x}$.

1. \heartsuit 2. \clubsuit 3. \spadesuit 4. \diamond 5. \diamond 6. \spadesuit 7. \spadesuit 8. \diamond 9. \clubsuit 10. \heartsuit
