




---

 Matematica III — Scritto del 13/9/04 — Quesiti
 

---

Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1. Siano  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  e  $v(x, y) = (x^3, x^2y)$ . Quanto fa  $\int_D \operatorname{div}(v)$ ?
  
2. Qual è l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema  $x' = x^3 t^2$ ,  $x(0) = 1$ ?
  
3. Se  $a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -7$ , quanto fa  $a_{100}$ ?
  
4. Se  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$  ha in 0 un polo di ordine 1, allora  $f(z) - \frac{1}{z}$  è olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$ ?
  
5. Calcolare  $\int_{\partial\Delta(-1,2)} \frac{dz}{z(z-2i)}$ .
  
6. Sia  $f(t) = t^2$  per  $t \in [-\pi, 0]$  e  $f(t) = \cos(t)$  per  $t \in (0, \pi]$ .  
Sia  $\alpha_n$  l' $n$ -esimo coefficiente di Fourier complesso di  $f$ . Quanto fa  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n$ ?
  
7. Calcolare la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})$  della funzione caratteristica dell'intervallo  $[-1, 1]$ .

---

 Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.
 

---

 1. ♥ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♦ 5. ♦ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♦ 9. ♣ 10. ♥
 

---



1.

(A) (3 punti) Si trovi una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

(B) (3 punti) Si risolva il problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = -2e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 2.$$

(Suggerimento: si cerchi una soluzione del tipo  $x(t) = \alpha(t) \cdot e^t$ ).(C) (2 punti) Sia  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che  $u' > 2u$  e  $u(0) = 1$ .Si provi che  $u$  è positiva su  $(0, +\infty)$ .(D) (2 punti) Sia  $x$  la soluzione del problema di Cauchy

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = \sin^2(t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 5.$$

Si provi che la funzione  $y = x' - 2x$  è positiva su  $(0, +\infty)$ .(Suggerimento: si cerchi un problema di Cauchy risolto da  $y$ ).(E) (2 punti) Si deduca dai punti (C) e (D) che la  $x$  del punto (D) è positiva su  $(0, +\infty)$ .2. Si consideri la funzione  $f(z) = \frac{1}{e^{\sin(z)} - 1}$ .(A) (3 punti) Si trovino le singolarità di  $f$  sull'asse reale, e se ne discuta il tipo.(B) (3 punti) Si trovino le singolarità di  $f$  fuori dall'asse reale, e se ne discuta il tipo.(C) (3 punti) Sia  $R$  il rettangolo di vertici  $-7\pi/2 - i$ ,  $7\pi/2 - i$ ,  $7\pi/2 + i$ ,  $-7\pi/2 + i$ .Si calcoli  $\int_{\partial R} f(z) dz$ .(D) (3 punti) Si calcoli  $\int_{\partial R} \frac{\cos(z) \cdot e^{\sin(z)}}{e^{\sin z} - 1} dz$ .



## Risposte esatte

5.  $\diamond$ 

1.  $\pi$ .
2.  $(-\infty, (3/2)^{1/3})$ .
3.  $3^{100} - 4^{100}$ .
4. Solo se il residuo è 1, altrimenti no.
5.  $-\pi$ .
6.  $1/2$ .
7.  $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})(x) = \frac{2 \sin(x)}{x}$ .

---

1.  $\heartsuit$  2.  $\clubsuit$  3.  $\spadesuit$  4.  $\diamond$  5.  $\diamond$  6.  $\spadesuit$  7.  $\spadesuit$  8.  $\diamond$  9.  $\clubsuit$  10.  $\heartsuit$

---