UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 9/2/04 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Per $t \in [0,1]$ la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\, \mathrm{e}^{-nt}$ è derivabile termine a termine?

2. La funzione $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x\cos(y) + y\sin(y))$ è parte reale di una funzione olomorfa f?

3. Calcolare $\int_{\partial\Delta(0,2)} \frac{(z^2-2)}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z$.

4. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta(0,2))$, che raggio di convergenza ha lo sviluppo di f centrato in $-i$?

5. $f(t) = \mathrm{e}^t \chi_{[-\pi,0]}(t)$. Calcolare il coefficiente di Fourier $\alpha_1(f)$.

6. Se $f(x) = \frac{x-1}{x+1} 3^x$, per quali z converge $\mathcal{L}(f)(z)$?

7. $\Omega = [0,1]^3$. Calcolare $\int_{\partial\Omega} (z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)$.

1. ♡ 2. ♣ 3. ♠ 4. ♢ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♠ 8. ♢ 9. ♣ 10. ♡

Matematica III — Scritto del 9/2/04 — Esercizî

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' + 2\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}x = 0.$$

(A) (3 punti) Si mostri che una funzione x risolve l'equazione se e solo se $x'(t) + \frac{2t}{1+t^2}x(t)$ è costante.

(B) (3 punti) Si mostri che se x è una soluzione non costante, allora su $[1,\infty)$ ha al più un punto critico (di massimo oppure di minimo).

(C) (4 punti) Si trovi una base dello spazio delle soluzioni.

(D) (2 punti) Si trovi la soluzione x tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 3$.

2. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Si chiami *trasformazione lineare fratta di coefficienti* a, b, c, d la funzione

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(A) (2 punti) Si verifichi che f è meromorfa su $\widehat{\mathbb{C}}$. Se ne trovino i poli in $\mathbb{C}$ e si calcoli il residuo relativo.

(B) (3 punti) Si mostri che $\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 0.$

(C) (2 punti) Sia v una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ tale che $v' = -\frac{2v}{z+\lambda}$. Si mostri che $(z+\lambda)^2 v(z)$ è costante.

(D) (2 punti) Sia u una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ per la quale 0 non sia un polo. Si supponga che che $u(0) = k \neq 0$ e $u' = \frac{1}{2}u^2$. Si mostri che $u^{(n)} = n!\, 2^{-n}\, u^{n+1}$ e si trovi u esplicitamente.

(E) (3 punti) Sia g una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con derivata mai nulla e tale che 0 non sia un polo. Si supponga che $\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 = 0$. Si mostri che g è una trasformazione lineare fratta.

Matematica III — Scritto del 9/2/04 — Quesiti

Risposte esatte

5. $\heartsuit$

1. Sì

2. $f(z) = z \cdot \mathrm{e}^{-z}$

3. $2\pi i$

4. Almeno 1

5. $(\mathrm{e}^{-\pi} + 1)(1 + i)/4\pi$

6. $\Re(z) > \log 3$

7. $2\,\mathrm{e} - 1$

1. $\heartsuit$ 2. $\clubsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\diamondsuit$ 5. $\heartsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\spadesuit$ 8. $\diamondsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\heartsuit$