

Prova scritta di Analisi - Laurea in Fisica
7 gennaio 2025

SOLUZIONI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha}.$$

Prima soluzione: Raccogliendo n^α al denominatore

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1} = \frac{n^{1-\alpha}}{e^{\alpha \log(1+\frac{1}{n})} - 1}.$$

Inoltre, considerando che $\alpha > 0$, poichè $e^{\alpha \log(1+\frac{1}{n})} - 1 \sim \alpha \log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{\alpha}{n}$, si ottiene:

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha},$$

per cui trattandosi di serie a termini di segno costante per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di termini $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$, vi è convergenza se e solo se $\alpha > 3$.

Seconda soluzione: come prima $\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1}$,

considerando quindi lo sviluppo binomiale al primo ordine $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(t^2)$, $t \rightarrow 0$,

ovvero la serie binomiale $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} t^k$, $|t| < 1$, si ottiene direttamente per $t = \frac{1}{n}$, $n > 1$:

$$\frac{n}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\alpha}.$$

Si conclude per confronto asintotico essendo serie a termini di segno costante.

Esercizio 2. Dati $x_0, u_0 \in \mathbb{R}$:

(1) si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = e^x(e^{u(x)} + e^{-u(x)}) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}.$$

(2) Si dica per quali dati iniziali la soluzione ha il dominio limitato.

1) L'equazione differenziale è a variabili separabili del primo ordine, $u'(x) = f(x)g(u(x)) = F(x, u(x))$. Essendo $f(x) = e^x$, $g(p) = 2 \cosh p$ funzioni $C^1(\mathbb{R})$ si è nelle ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, e il problema ai dati iniziali ha un'unica soluzione, definita in un intorno di x_0 . Sia I l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione.

Poichè $g \geq 2 > 0$, dividendo per $g(x)$ e raccogliendo $e^{-u(x)}$ in tale denominatore:

$$(e^x)' = e^x = \frac{u'(x)}{e^{u(x)} + e^{-u(x)}} = \frac{e^{u(x)}u'(x)}{1 + e^{2u(x)}} = (\operatorname{artan} e^{u(x)})'$$

per cui $e^x + c = \operatorname{artan} e^{u(x)}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c = \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}$:

$$\forall x \in I \operatorname{artan} e^{u(x)} = e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}, \quad (\text{A})$$

poichè $\operatorname{artan} e^{u(x)} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, calcolando, nell'ordine, la funzione tangente e quindi il logaritmo dei due membri dell'eguaglianza necessaria, si esplicita u :

$$\forall x \in I u(x) = \log \tan (e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0}). \quad (\text{B})$$

2) Si tratta in sostanza di esplicitare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy con dati x_0, u_0 . Dalla relazione (A), necessariamente deve essere

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad 0 < e^x + \operatorname{artan} e^{u_0} - e^{x_0} < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \\ \forall x \in I \quad e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} < e^x < e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} : \end{aligned}$$

i) se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$ la prima disequaglianza è sempre verificata, e quindi, passando ai logaritmi, l'unica condizione su I è

$$\forall x \in I \quad x < \log \left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right),$$

d'altronde per ognuno di tali x è ben definita la funzione in (B) ed è soluzione.

Quindi se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} \leq 0$ si ha $I = \left(-\infty; \log \left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right)\right)$;

ii) invece se $e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0} > 0$, si ottiene

$$\forall x \in I \quad \log (e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}) < x < \log \left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right)$$

e con ragionamento analogo, I è *limitato*:

$$I = \left(\log (e^{x_0} - \operatorname{artan} e^{u_0}); \log \left(e^{x_0} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{artan} e^{u_0} \right) \right).$$

Esercizio 3. Sia $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- (1) Si mostri che, per $0 < |x| < 1$ o per $x > 1$, è ben definito $F(x)$ ed è un numero reale.
- (2) Si studino i limiti di $F(x)$ per x che tende a 0, 1, e $+\infty$.
- (3) Per quali $x \leq -1$ è ben definita $F(x)$, eventualmente come integrale improprio? Per quali è un integrale convergente?

1) Se $|x| < 1$ o $x > 1$ ($x \neq 0$) si ha che x non appartiene all'intervallo chiuso limitato di estremi x^2 e x^3 . Quindi $f_x(t) = \frac{\sin t}{t-x}$ è continua in tale intervallo, per cui è ivi Riemann integrabile. Essendo $F(x)$ l'integrale di f_x è un ben definito numero reale.

2) Per tali x può esser utile effettuare il cambio di variabile $s = t - x$, che, nel caso, permette di eliminare la variabile x nella funzione integranda.

Infatti, se $|x| < 1$ o $x > 1$ si ha che 0 non è nell'intervallo chiuso di estremi $x^2 - x$ ed $x^3 - x$ (per cui tali estremi hanno lo stesso segno), e quindi:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt = \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin(s+x)}{s} ds = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds$$

$$=: A(x) + B(x).$$

$$\text{i) } x \rightarrow 0: |B(x)| \leq \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{|\sin s|}{|s|} ds \right| \leq \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} ds \right| = |x^3 - x^2|,$$

$$|A(x)| \leq |x| \left| \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{|s|} ds \right| = |x| |\log |x^3 - x| - \log |x^2 - x|| = |x| |\log(x+1)|.$$

Quindi $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

ii) $x \rightarrow +\infty$: A e B sono prodotto delle funzioni limitate, rispettivamente $\sin x$ e $\cos x$, per le funzioni $\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds$, $\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds$. Queste sono infinitesime per $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds = \int_2^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds - \int_2^{x^2-x} \frac{\cos s}{s} ds,$$

$$\int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds = \int_2^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds - \int_2^{x^2-x} \frac{\sin s}{s} ds,$$

$$\text{ed } \exists \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{\cos s}{s} ds, \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{\sin s}{s} ds \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x, x^3 - x \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi anche in questo caso $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

iii) $x \rightarrow 1$: come sopra $|B(x)| \leq |x^3 - x^2| \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$,

$$A(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1}{s} ds - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{1 - \cos s}{s} ds = \sin x \log(x+1) - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds,$$

il primo integrale tende a $\sin 1 \log 2$, il secondo a 0 per $x \rightarrow 1$ in quanto gli estremi di integrazione sono infinitesimi e l'integranda è prolungabile con continuità in 0.

3) - Per $x = -1$ si ha $F(x) = \int_1^{-1} \frac{\sin t}{t+1} dt$ è ben definito come integrale improprio su

$$(-1; 1]: F(x) = - \lim_{c \rightarrow -1^+} \int_c^0 \frac{\sin t}{t+1} dt + \text{numero} = +\infty.$$

- Per $x < -1$ si ha $x^3 < x < -1 < 0 < 1 < x^2$, in particolare x è strettamente compreso tra x^3 ed x^2 . Vi sono due casi:

i) $\sin x \neq 0$, cioè $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x < -1$. In questo caso $F(x)$ non è ben definito come integrale improprio (nel caso si tenga presente che $x^3 < x < x^2$ e che $\sin x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt &=_{def} \lim_{c \rightarrow x^+} \int_{x^2}^c \frac{\sin t}{t-x} dt + \lim_{d \rightarrow x^-} \int_d^{x^3} \frac{\sin t}{t-x} dt \\ &= - \lim_{c \rightarrow x^+} \int_c^{x^2} \frac{\sin t}{t-x} dt - \lim_{d \rightarrow x^-} \int_{x^3}^d \frac{\sin t}{t-x} dt \\ &= -\text{sign}(\sin x) [+\infty + (-\infty)]. \end{aligned}$$

ii) $\sin x = 0$, cioè $x = -k\pi$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In questo caso l'integranda è prolungabile con continuità in $-k\pi$:

$$\frac{\sin t}{t+k\pi} = \frac{\sin((t+k\pi)-k\pi)}{t+k\pi} = (-1)^k \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} \rightarrow (-1)^k, \quad t \rightarrow -k\pi,$$

quindi l'integrale improprio $\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t+k\pi} dt$ è ben definito e finito.

ADDENDA: per completezza si esaminiamo i comportamenti asintotici di F per $x \rightarrow -1$, e $x \rightarrow -\infty$. Sia $D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} : \exists F(x) \in \mathbb{R}\}$.

Per prima cosa si osserva che:

- 1 è solo punto di accumulazione sinistro di D ,
- $-\infty$ è punto di accumulazione di D ($-k\pi \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow +\infty$),
- $-\infty$, -1 , 0 , 1 , $+\infty$ sono gli unici punti di accumulazione di D .

i) $x \rightarrow -1^+$: per $-1 < x < 0$ come osservato $-1 < x < x^3 < 0 < x^2 < 1$. Con le notazioni introdotte al punto 2):

$$F(x) = \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\cos s}{s} ds + \cos x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{\sin s}{s} ds : A(x) + B(x)$$

$$B(x) \rightarrow -\cos 1 \int_0^2 \frac{\sin s}{s} ds, \quad x \rightarrow -1^+,$$

$$A(x) = \sin x \log(x+1) - \sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -1^+.$$

$$\text{Nota: } -\sin x \int_{x^2-x}^{x^3-x} \frac{O_{s \rightarrow 0}(s^2)}{s} ds \rightarrow \sin 1 \cdot \int_2^0 \frac{1 - \cos s}{s} ds \in \mathbb{R}, \text{ per } x \rightarrow -1^+.$$

ii) $x \rightarrow -\infty$:

$$F(-k\pi) = (-1)^k \int_{k^2\pi^2}^{-k^3\pi^3} \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi} dt = (-1)^{k+1} \left[\int_{-k^3\pi^3+k\pi}^0 \frac{\sin s}{s} ds + \int_0^{k^2\pi^2+k\pi} \frac{\sin s}{s} ds \right],$$

poichè $\frac{\sin s}{s}$ è pari ed ha integrale improprio *non nullo* su tutto $\mathbb{R}$ si ha che $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.