ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 59 - 28.2.2024

Es $u' = x^2 \cdot e^u$

$$\frac{u'(x)}{e^{u(x)}} = x^2 \qquad \int \frac{u'(x)\,dx}{e^{u(x)}} = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\Vert \quad \begin{cases} u = u(x) \\ du = u'(x)\,dx \end{cases}$$

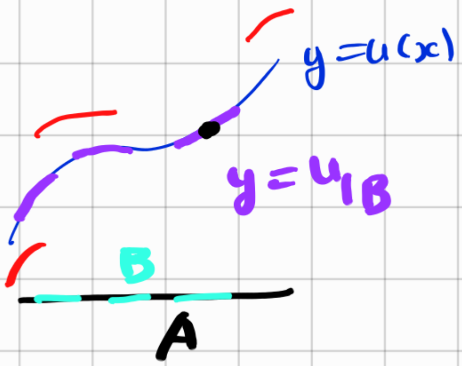
$$\int \frac{1}{e^u}\,du = -e^{-u(x)}$$

$$-e^{-u(x)} = \frac{x^3}{3} + c \qquad u(x) = -\ln\left(-\frac{x^3}{3} - c\right)$$

$$-\frac{x^3}{3} - c > 0 \qquad \frac{x^3}{3} < -c$$

$$u_c : (-\infty, \sqrt[3]{-3c}) \to \mathbb{R} \qquad x < \sqrt[3]{-3c}$$

Oss Se $u : A \to \mathbb{R}$ risolve una eq. differenziale ovviamente $u|_B$ $B \subseteq A$ risolve la stessa eq.



① le soluzioni dei problemi di Cauchy sono sempre definite su un intervallo.

② si prende l'intervallo più "grande" possibile

def. Una sol. $u : I \to \mathbb{R}$ | I intervallo | si dice essere massimale se non esiste $J \supseteq I$, $J \neq I$ intervallo con $v : J \to \mathbb{R}$ soluzione, $v = u$ su I.

EQ. A VARIABILI SEPARABILI

ES

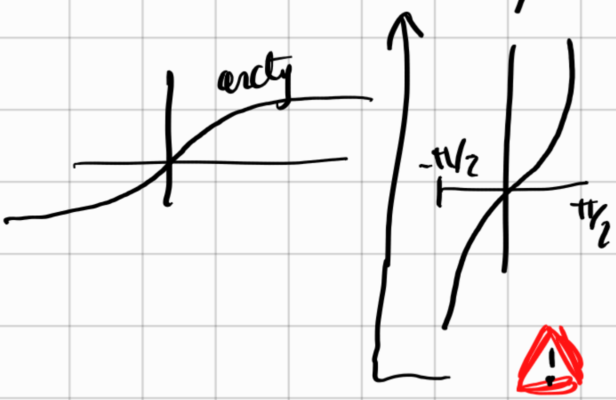
$$u' = xu^2 + x = x \cdot (u^2+1)$$

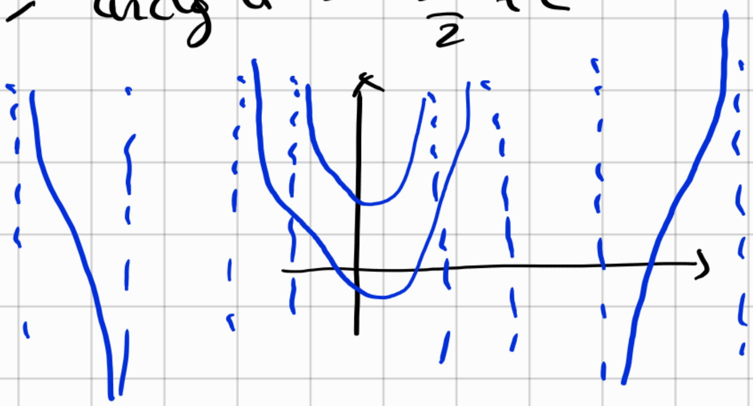
$u = u(x)$
$du = u'(x)\,dx$

$$\frac{u'}{u^2+1} = x \qquad \int \frac{u'(x)\,dx}{u^2(x)+1} = \int x\,dx$$

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \int x\,dx, \quad \operatorname{arctg} u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$u(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$



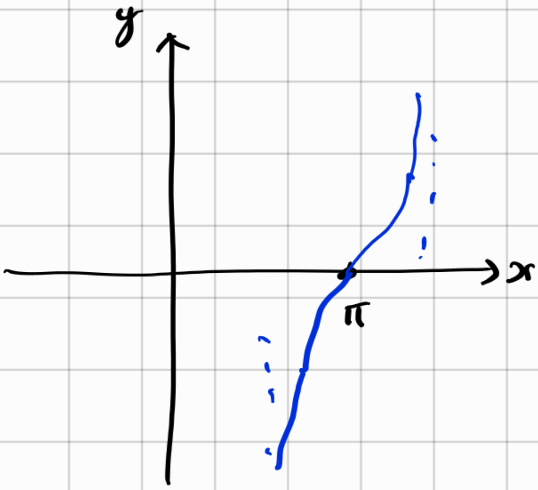


⚠ sarebbe $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \operatorname{arctg}^{-1}$.

ma il risultato è comunque corretto.

ES problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = xu^2 + x \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$$



$$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = x$$

$$\int_\pi^x \frac{u'(t)}{1+u^2(t)}\,dt = \int_\pi^x t\,dt$$

$u = u(t)$
$du = u'(t)\,dt$

$$\int_{\underset{=0}{u(\pi)}}^{u(x)} \frac{du}{1+u^2} = \int_{\pi}^{x} t\,dt$$

$$\Big[\operatorname{arctg} u\Big]_0^{u(x)} = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\pi}^{x}$$

$$\operatorname{arctg} u(x) - \cancel{\operatorname{arctg} 0} = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}$$

$$u(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2-\pi^2}{2}\right)$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?

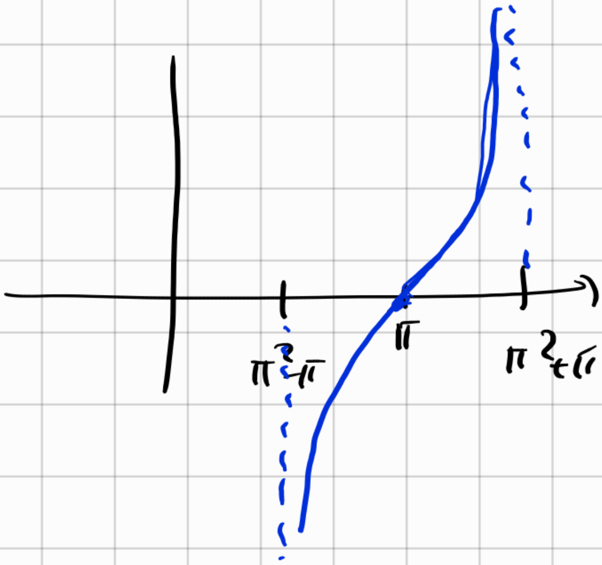
$$\operatorname{tg} = \operatorname{tg}_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \operatorname{arctg}^{-1}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2-\pi^2}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \pi^2-\pi < x^2 < \pi^2+\pi$$

$$\sqrt{\pi^2-\pi} < x < \sqrt{\pi^2+\pi}$$

$$I = \left(\sqrt{\pi^2-\pi}, \sqrt{\pi^2+\pi}\right)$$

è l'intervallo massimale di esistenza



Es (già fatto) $\qquad u' = u \qquad$ (era lineare)

è anche a variabili separabili.

$$\frac{u'}{u} = 1 \qquad \int \frac{u'}{u}\,dx = \int 1\,dx$$

$$\int \frac{du}{u} = x + c$$

$$\ln u = x + c$$

$$u(x) = e^{x+c} = e^c e^x = k \cdot e^x.$$

Se però siamo più attenti: $k > 0$.
dovevo mettere il modulo:

$$\ln |u| = x + c$$

$$|u| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x$$

$$u(x) = \pm e^c e^x = k e^x \qquad k \neq 0.$$

Dove abbiamo perso la sol. $u = 0$?
... dividendo per u.

Risoluzione attenta: $u'(x) = u(x)$

Nei punti in cui $u(x) \neq 0$ posso dividere per $u(x)$:

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = 1. \quad \ldots \quad \ln |u(x)| = x + c$$

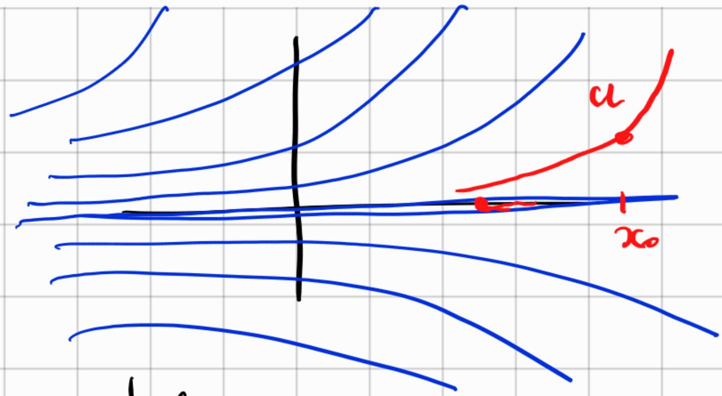
$$u(x) = \pm e^c \cdot e^x$$

$u(x) = k e^x$ con $k \neq 0$ sono tutte soluzioni massimali.

ma ci può essere una sol. che si annulla in qualche punto.

Oss $u = 0$ (costante) è soluzione massimale

$u(x) = k e^x$ è sol. $\forall\, k \in \mathbb{R}$.



Ci possono essere altre soluzioni?

u ?

Se ci fosse un'altra soluzione u se non è identicamente nulla $u(x_0) \neq 0$ e allora $u(x)$ dove non si annulla coincide con ke^x con $k \neq 0$.
Ma ke^x non si annulla mai quindi x_0 non esiste.

Es $\quad u'(x) = u^2(x)$ $\qquad\qquad$ $u' = u^2$

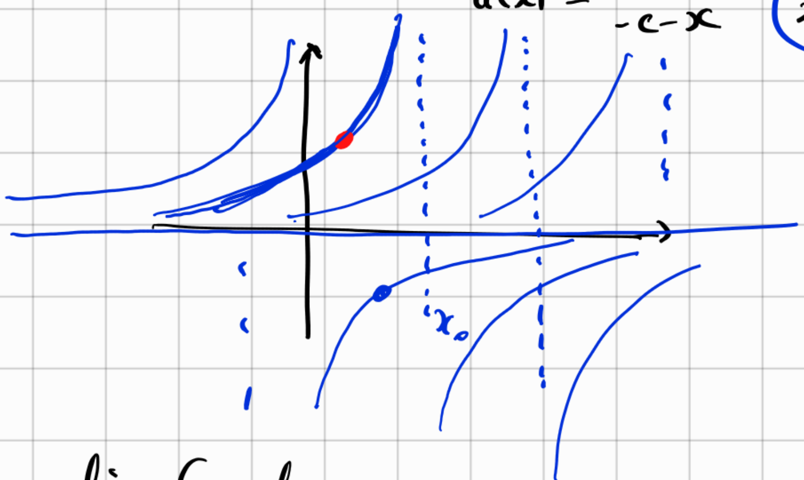
$u = 0$ è soluzione. $\qquad\qquad$ $\frac{du}{dx} = u^2$

Negli intervalli in cui $u(x) \neq 0$:

$\exists c$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dx \qquad -\frac{1}{u(x)} = x + c \qquad x_0 = -c$$

$$u(x) = \frac{1}{-c-x} = \frac{1}{x_0 - x}$$



Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = u^2(x) \\ u(1) = -1 \end{cases}$$

⊛ Negli intervalli in cui $u(x) \neq 0$ posso dividere per $u(x)$.

$$\int_1^x \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt = \int_1^x 1\,dt = [t]_1^x = x-1$$

$u=u(t)$
$du=u'(t)dt$

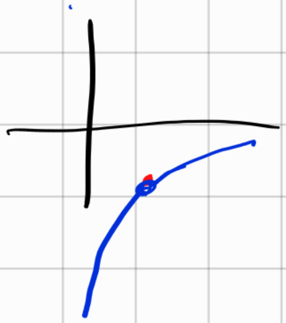
$u(1)=-1$

$$\| \qquad \int_{-1}^{u(x)} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{u(x)} = -\frac{1}{u(x)} - \left(-\frac{1}{-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{u(x)} - 1$$

$$-\frac{1}{u(x)} = x \qquad u(x) = -\frac{1}{x}$$

Dov'è definita la soluzione massimale? $x>0$ (non $x\neq 0$)
(deve essere un intervallo)



Esercizio per 🏠 $\qquad u'(x) = u^p(x)$ con $p>1$

ES (Baffo di Peano)

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$u(x)=0$ è soluzione (!)

Negli intervalli in cui $u(x)\neq 0$ posso dividere per $\sqrt[3]{u(x)}$:

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1 \qquad \int \frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}}\,dx = \int 1$$

$$\| $$

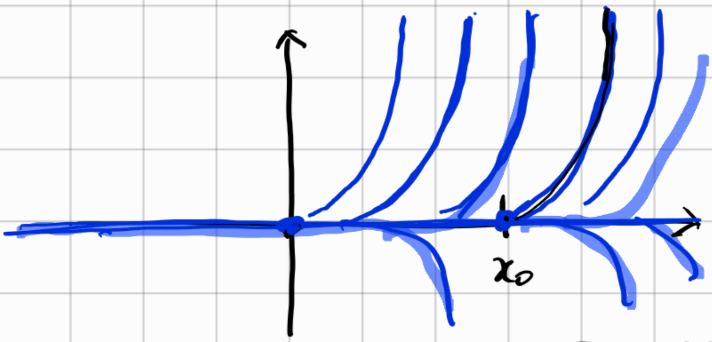
$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{u^2(x)} = x + c \qquad u^2(x) = \left(\frac{2}{3}(x-x_0)\right)^3$$

pongo $x_0 = -c$

Deve essere $x > x_0$ perché $u^2(x) > 0$.

$$u(x) = \pm \sqrt{\frac{8}{27}(x-x_0)^3} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sqrt{(x-x_0)^3}$$



per $x \to x_0$ $\underline{u(x) \to 0}$

e $u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \to 0$

per $x \to x_0$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sqrt{(x-x_0)^3} & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

sono tutte soluzioni della eq. diff.

Se $x_0 \geq 0$ si ha anche $u(0) = 0$

$\square$