ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 45 - 26.1.2024

Teorema f continua su $[a,b]$ allora f è integrabile su $[a,b]$

dim

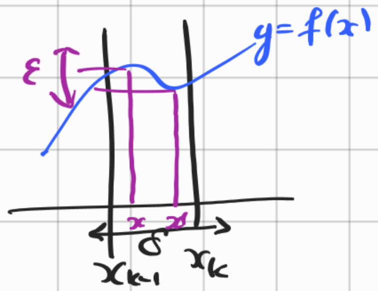
$$f \text{ continua} \xrightarrow{\text{Heine-Cantor}} f \text{ è uniformemente continua, cioè}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Prendo P una suddivisione di $[a,b]$

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$$

tale che $\quad x_k - x_{k-1} < \delta$



$$\forall x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \qquad f(x) - f(x') < \varepsilon$$

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f \le \varepsilon$$

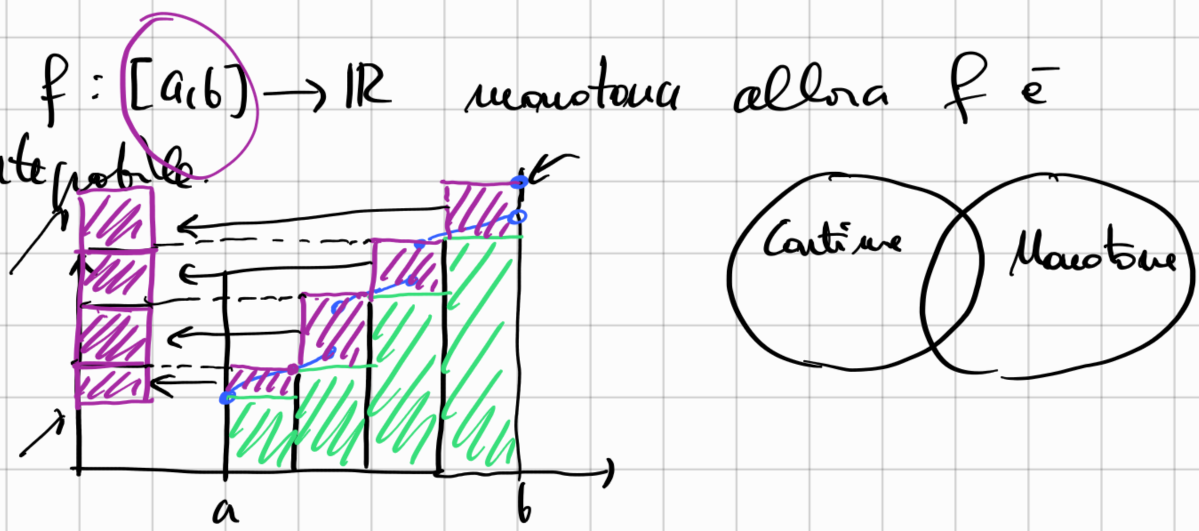
$$S^*(f,P) - S_*(f,P) \le \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \cdot (b-a)$$

Per il criterio di integrabilità f è integrabile □

Teorema $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona allora f è R-integrabile.

dim



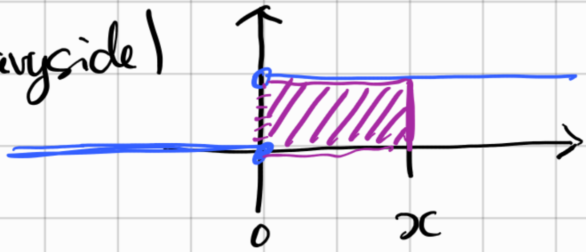
Sia f crescente. Sia P_n una suddivisione equi-spaziata

$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ $\qquad S^*(f,P) - S_*(f,P) =$ 

$= \frac{b-a}{n} \cdot [f(b) - f(a)] \longrightarrow 0 \quad$ se $n \to +\infty$

Per i criteri di integrabilità f è integrabile.

Esempio (Heaviside)



$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

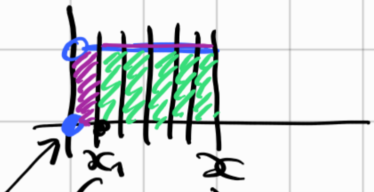
è crescente, quindi integrabile su qualunque intervallo $[a,b]$.

Esercizio

$$F(x) = \int_0^x H = \begin{cases} \int_0^x H & \text{se } x \geq 0 \\ -\int_x^0 H & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

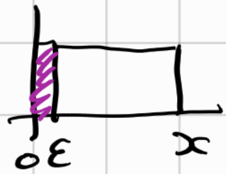
Se $x=0$, $F(0)=0$

Se $x>0$ $\quad \int_0^x H = x$



$$S^*(H,P) - S_*(H,P) = (\underset{\text{sup}}{1} - \underset{\text{inf}}{0}) \cdot (x_1 - x_0) = x_1 - x_0 < \varepsilon$$

Basta prendere $P_\varepsilon = \{0, \varepsilon, x\}$.



$S^*(H,P_\varepsilon) = x \cdot 1 \qquad S_*(H,P_\varepsilon) = (x - x_1) \cdot 1$
$= x - \varepsilon$

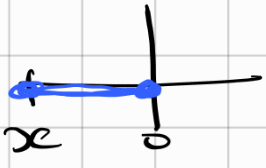
$I^*(H) \leq S^*(H,P_\varepsilon) = x$

$\forall \varepsilon > 0 \quad I_*(H) \geq S_*(H,P_\varepsilon) = x - \varepsilon \Rightarrow I_*(H) = x.$

$\int_0^x H = x.$

Se $x<0$

$\int_0^x H = -\int_x^0 H = 0$



Lemma Se f è R-integrabile su $[a,b]$ e g differisce da f in un solo punto allora g è integrabile e

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

dim come nell'esempio sopra.

Oss 1. Per induzione basta che $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ sia finito.

Oss 2. $$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{(Dirichlet)}$$

$\{f(x) \neq 0\} = \mathbb{Q}$ è numerabile. già visto

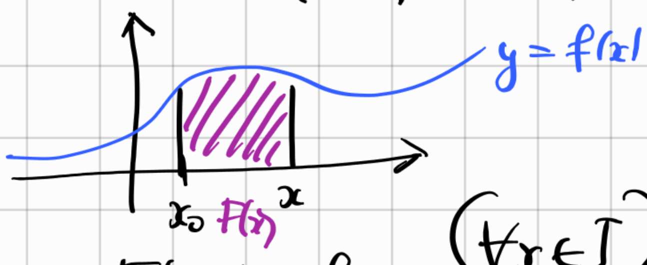
f non è R-integrabile su $[a,b]$ se $b > a$.

Teorema fondamentale del Calcolo

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $I \subseteq \mathbb{R}$ I intervallo. (f è integrabile su ogni $[a,b] \subseteq I$). Scelto $x_0 \in I$ definiamo:

funzione integrale $\longrightarrow$ $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \qquad \forall x \in I. \quad ([x_0, x] \subseteq I)$$

$F : I \to \mathbb{R}$.



Allora F è derivabile e $F'(x) = f$. $(\forall x \in I)$

Inoltre se G è una qualunque funzione $G: I \to \mathbb{R}$ tale che $G'(x) = f$, allora $a, b \in I$

$$\boxed{\int_a^b f = G(b) - G(a).}$$

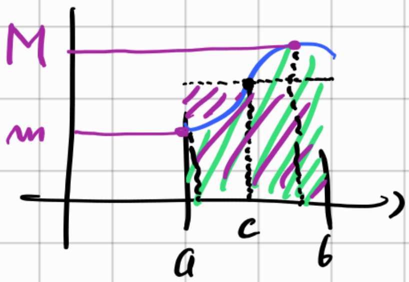
FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Def Se $F' = f$ diremo che F è una primitiva di f. (o antiderivata)

Per la dimostrazione ci servirà:

Teorema (media integrale)

Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\exists\, c \in [a,b)$ tale che



$$\int_a^b f = (b-a) \cdot f(c)$$

ovvero:
$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(c)$$

Notazione $\dfrac{\int_a^b f}{b-a} =: \fint_a^b f$

media integrale di f su $[a,b]$

dim Per Weierstraß f ha max e min su $[a,b]$

$$f(x_0) = M = \max f([a,b])$$
$$f(x_1) = m = \min f([a,b])$$

$$m \cdot (b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M \cdot (b-a)$$

$$f(x_1) = m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f}{b-a}}_{} \leq M = f(x_0)$$

$\to$ è un valore intermedio.

Per il teorema dei valori intermedi $\exists c : f(c) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$. $\square$

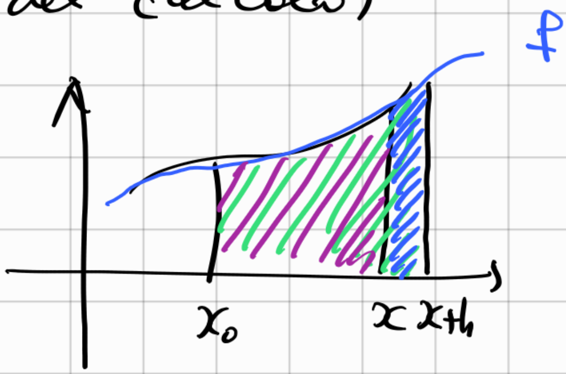
OSS Se $b<a$? $\dfrac{\int_a^b f}{b-a} = \dfrac{\int_b^a f}{a-b}$

il teorema vale anche in questo caso (e anche se $a=b$)

dim (teorema fondamentale del calcolo)

Sia $x_0 \in I$. Sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \qquad (\forall x \in I)$$



Scriviamo il rapporto incrementale in $x \in I$.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = \fint_x^{x+h} f$$

$$\int_{x_0}^{x+h} = \int_{x_0}^{x} + \int_x^{x+h}$$

teor. media, f continua $\longrightarrow$ $= f(c)$

$c = c(h)$

$x \le c \le x+h$ se $h>0$

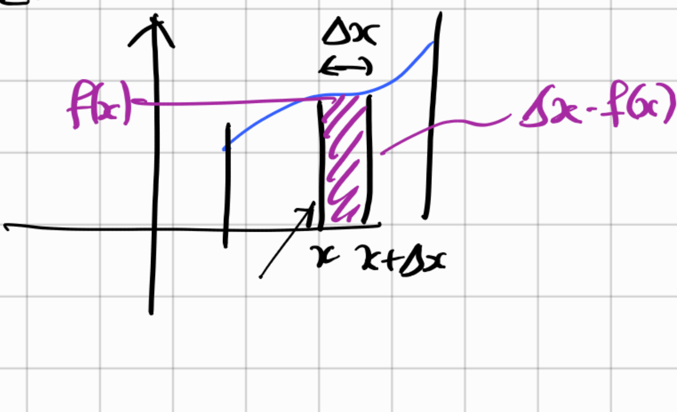
$x-h \le c \le x$ se $h<0$

$c(h) \to x$ per $h \to 0$

f è continua

Ma $f(c) = f(c(h)) \longrightarrow f(x)$

dunque $F'(x) = f(x)$. $\square$



dim (Formula fondamentale).

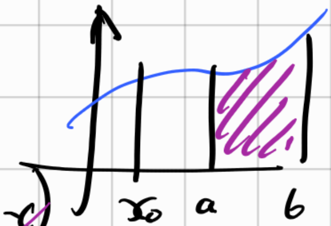
Sia G tale che $G' = f$. Sia F come prima:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \quad \text{. Sappiamo che } F' = f.$$

Dunque $(G-F)' = f - f = 0$ significa che $G-F$ è costante.

[criterio di monotonia. Vale perché I è un intervallo]

$$\int_a^b f = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = F(b) - F(a)$$



se $G - F = c$

$F = G - c$

$$F(b)-F(a) = (G(b) - \cancel{c}) - (G(a) - \cancel{c}) = G(b) - G(a) \qquad \square$$

Esempio

$$\int_0^b x^2\,dx = G(b) - G(0) = \frac{b^3}{3} - 0 = \frac{b^3}{3}$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3}$$

FINE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è discontinua su tutto $\mathbb{R}$

se $\frac{p_k}{q_k} \to x \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è discontinua su $\mathbb{Q}$

è R-integrabile ?