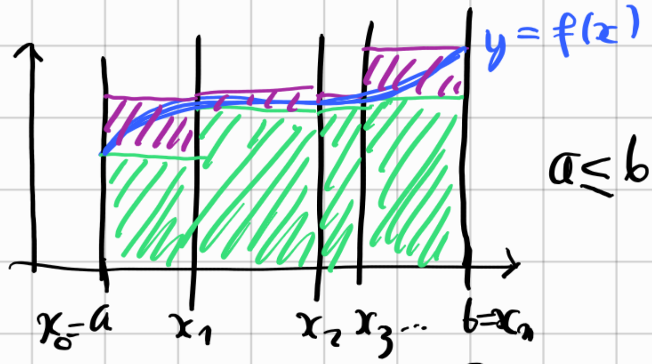
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 44 — 24.1.2024

Integrale (di Riemann)

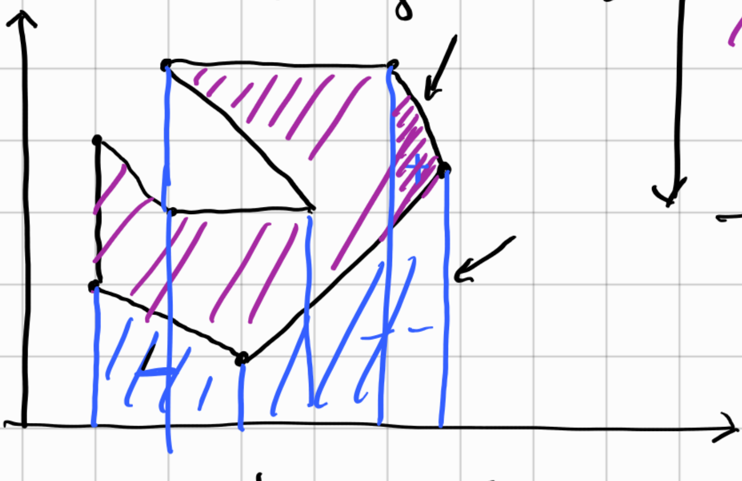
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

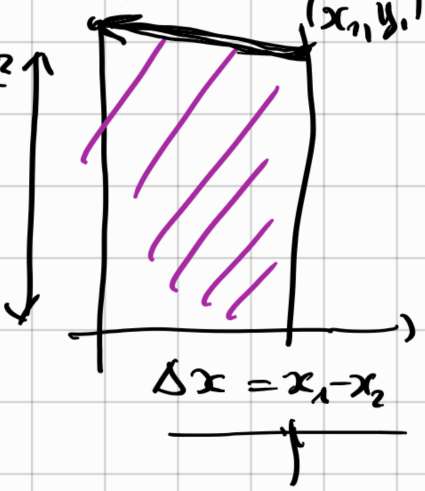


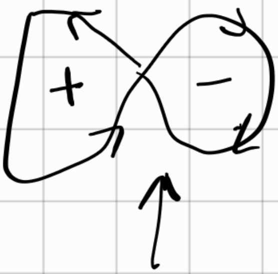
$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sup_{\inf} f(I_k)}_{f(x)}\underbrace{(x_k-x_{k-1})}_{\Delta x} \qquad I_k=[x_{k-1},x_k)$$

Convenzione se $a>b$ $\int_a^b f = -\int_b^a f$

$\int_a^b f$ è una area "con segno".

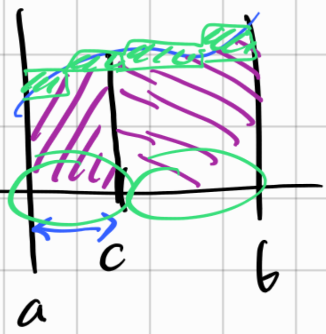






Teorema (additività (rispetto al dominio))

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata, $a\le c\le b$.



1) f è R-integrabile su $[a,b]$ se e solo se f è R-integrabile su $[a,c]$ e $[c,b]$.

Inoltre:

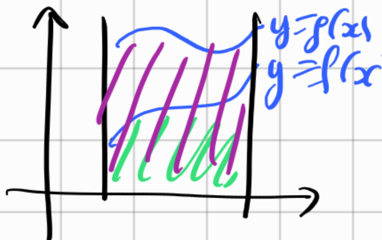
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad (*)$$

$(*)$ vale se $a,b,c\in\mathbb{R}$ sono qualunque e f è R-integrabile su un intervallo che contiene a,b,c.

dim a parole $\square$

Teorema (monotonia) Se f,g sono R integrabili su $[a,b]$ $(a<b)$ e se $f\le g$ (significa $f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,b]$)

allora
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$



dim banale: se $f\le g$

$$\sup_A f \le \sup_A g$$
$$\inf_A f \le \inf_A g \qquad \square$$

Teorema (linearità) Se f,g sono R-integrabili su $[a,b]$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ allora: $\lambda f+\mu g$ è R-integr. su $[a,b]$

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g) = \lambda\int_a^b f + \mu\int_a^b g.$$

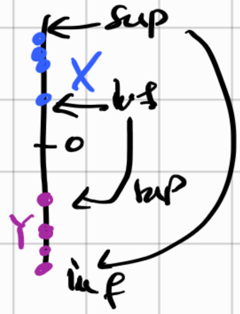
$\left[\,R([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} : f \text{ (limitata) R-integrabile su } [a,b]\}\,\right]$

$\mathcal{R}([a,b])$ è un sotto sp. vettoriale di $\mathbb{R}^{[a,b]}$. $\left(0\in\mathcal{R}([a,b])\right)$

e $\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare.

dim Passo 1. $\lambda=-1$. Se $f\in\mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow -f\in\mathcal{R}([a,b])$

e $\int_a^b -f = -\int_a^b f$.



$$\sup(-X) = -\inf(X)$$

$$\inf(-X) = -\sup(X)$$

$$S^*(-f,P) = -S_*(f,P)$$

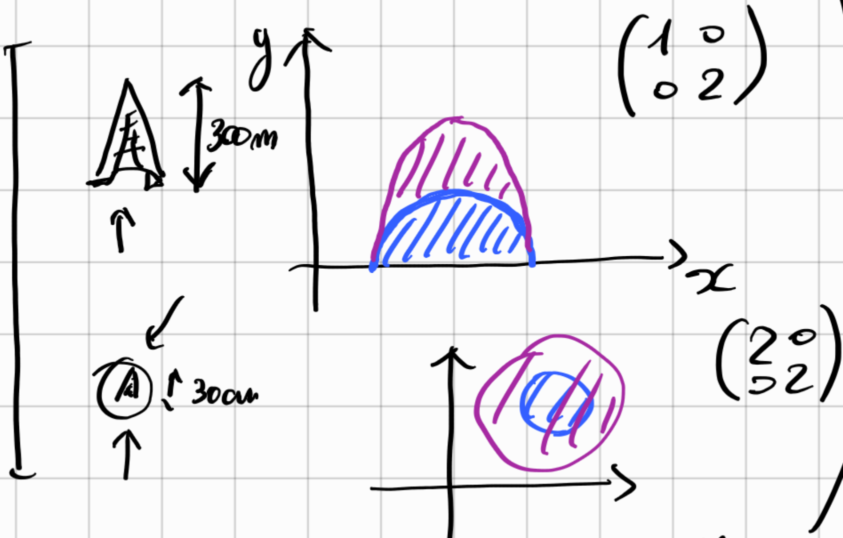
$$\Downarrow$$

$$I^*(-f,P) = -I_*(f,P) \quad \ldots\ldots \quad \square$$

Passo 2 $\lambda\geq 0$. $f\in\mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \lambda f\in\mathcal{R}([a,b])$

e $\int \lambda f = \lambda \int f$.

Es



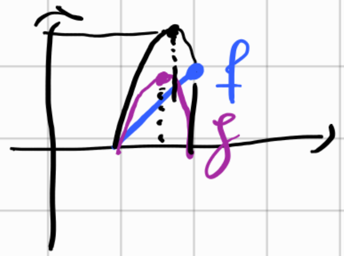
$\lambda>0$

$$\sup_A \lambda f = \lambda \sup_A f \Rightarrow S^*_*(\lambda f,P) = \lambda S^*_*(f,P)$$

$$I^*_*(\lambda f) = \lambda I^*_*(f) \quad \square$$

Passo 3 $\quad f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}([a,b])$

$$\text{e} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g .$$



$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$$

$$\inf_A (f+g) \geq \inf_A f + \inf_A g$$

$$S_*(f,P)+S_*(g,P) \leq \underbrace{S_*(f+g,P) \leq S^*(f+g,P)}_{2\varepsilon} \leq S^*(f,P) + S^*(g,P)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \varepsilon \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \varepsilon \qquad \downarrow$$

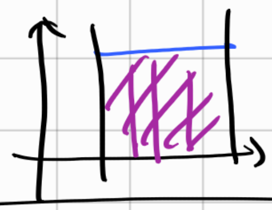
$$I_*(f)+I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f)+I^*(g)$$

$\square$

Oss Se f e g non sono $\mathcal{R}$-int. è possibile che $f+g$ lo sia.

Oss Se $f(x)=c$ (costante) f è $\mathcal{R}$-int.

e $\int_a^b c = c\cdot(b-a)$.



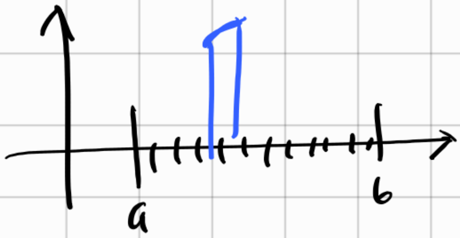
Teorema (Heine-Cantor) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.
Già visto! ($[a,b]$ è uno sp. metrico compatto).

Teorema (integrabilità delle fn continue).
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora f è $\mathcal{R}$-integrabile su $[a,b]$.
$\mathcal{R}([a,b])\supseteq C^0([a,b])$

dim Devo mostrare che $\forall\varepsilon>0\ \exists P$ suddivisione t.c.

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

$$P=\{x_0<x_1<\dots<x_n\} \qquad x_k-x_{k-1}\le\delta$$



$$\sum_k \boxed{\sup_{[x_k,x_{k-1}]} f-\inf_{[x_k,x_{k-1}]} f}$$

Oss se $h\to 0$ $\quad \sup_{[x,x+h]} f-\inf_{[x,x+h]} f\to 0$ per $h\to 0$

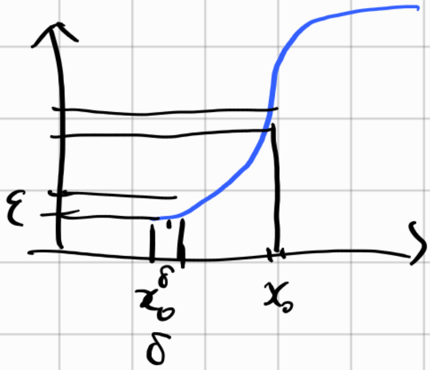
$\sup_{[x,x+h]} f \downarrow f(x)$, $\quad \inf_{[x,x+h]} f \downarrow f(x)$

Problema: in intervalli diversi la convergenza a zero può avere velocità diversa

Ma se f è uniformemente continua allora la velocità di convergenza a zero non dipende da x:

C. uniforme
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_0\in[a,b]\ \forall x\in[a,b]: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

continuità:
$\forall x_0\in[a,b]: \underbrace{\forall\varepsilon\ \exists\delta>0\ \forall x: |x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}_{\text{continua in } x_0}$



$$\underbrace{\underbrace{S_*(f,P) \le I_*(f)}_{\frac{\varepsilon}{2}} = \underbrace{I^*(f) \le S^*(f,P)}_{\frac{\varepsilon}{2}}}_{\varepsilon}$$