ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 13 – 15.4.2024

Regolarità C^k Sia $L = L(x,y,z)$, $L \in C^k$ $x\in[a,b]$, $y,z \in \mathbb{R}$

$k \geq 2$, $k \leq +\infty$, $u = u(x)$ $u \in C^1([a,b])$,

soddisfa EL: $\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u') = \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u')}$ $\forall x\in[a,b]$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\big(x,u(x),u'(x)\big) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Allora $u \in C^k$

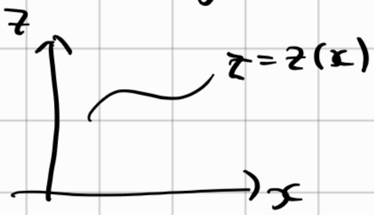
dim ($k=2$)

$$H(x,z) = \frac{\partial L}{\partial z}\big(x,u(x),z\big) - \int_a^x \frac{\partial L}{\partial y}\big(t,u(t),u'(t)\big)\,dt$$

$$\frac{d}{dx} H(x,u'(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x,u,u') - \frac{\partial L}{\partial y}(x,u,u') = 0$$

$(x,u'(x))$ è una curva di livello di H.

$z(x) = u'(x)$



$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x,z) = \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}\big(x,u(x),z\big) + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}\big(x,u(x),z\big)u'(x) - \frac{\partial L}{\partial y}\big(x,u(x),u'(x)\big)}_{C^0 \quad L\in C^2 \quad u \in C^1} \\ \frac{\partial H}{\partial z}(x,z) = \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\big(x,u(x),z\big)}_{C^0} \end{cases}$$

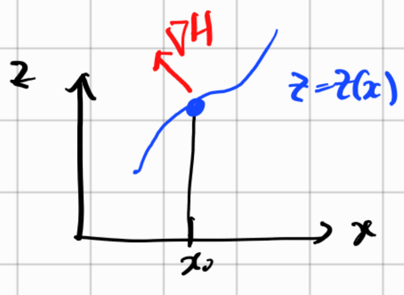
$H \in C^1$

Fissato $x_0 \in (a,b)$ applico il teorema del Dini in un intorno di $(x_0, u'(x_0))$

$$\frac{\partial H}{\partial z}(x_0,u'(x_0)) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x_0,u(x_0),u'(x_0)) > 0$$

$z(x) = u'(x)$.

posso applicare il teorema del Dini



Dini mi dice che $z = z(x)$ è di classe C^1 $\left(\Rightarrow u \in C^2\right)$

e vale:

$$u''(x) = z'(x) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(x, u(x), u'(x))}{\frac{\partial H}{\partial z}(x, u(x), u'(x))} = -\frac{\quad C^0}{\quad C^0, >0}$$

$$\left[0 = \frac{d}{dx} H(x, z(x)) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{\partial H}{\partial z}(x, z(x)) \cdot z'(x) \right]$$

u è di classe C^2 in un intorno di x_0 $\left(\text{per ogni } x_0 \in (a,b) \right)$

Cosa succede in $x_0 = a$ e $x_0 = b$?

$\Big[$ <u>Criterio di derivabilità</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua,

f derivabile su (a,b), $\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}$

Allora $\exists f'(a) = m$. $\Big]$

u' è derivabile in (a,b) $\quad$ u' è continua su $[a,b]$

$$\Rightarrow \quad u''(x) = -\frac{\quad}{\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x))} \in C^0$$

$$\Big\downarrow x \to a^+$$

$$-\frac{\quad}{\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(a, u(a), u'(a)) > 0} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \exists u''(a)$ $\quad$ lo stesso in b.

$\Rightarrow u \in C^2([a,b])$

<u>Bootstrap</u>: Se $u \in C^k$ e $L \in C^{k+1}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $u \in C^{k+1}$

$$u''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 L}{\dots}(x, u, u') \quad \in C^{k-1}}{\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, u, u') \quad \in C^{k-1}} \in C^{k-1}$$

$\Rightarrow u \in C^{k+1}$

$\square$

RUDIMENTI di ANALISI FUNZIONALE

Metodo diretto Voglio mostrare che $\mathcal{L}(u)$ ha minimo.
vorrei seguire il metodo del teo. di Weierstrass:
$\mathcal{L}: E \to \mathbb{R}$ $\exists\, u_k \in E \longrightarrow \mathcal{L}(u_k) \to \inf \mathcal{L}(E)$

① [Vorrei poter dire che $u_k \in K$ compatto per una opportuna topologia metrizzabile su E]
$\exists\ u_{k_j} \to u.$

② [$\mathcal{L}(u) \leq \liminf \mathcal{L}(u_k)$ se $u_k \to u$]
semicontinuità inferiore

Se E è uno spazio di Banach (spazio normato completo)
$(E, \|\cdot\|)$
OBIETTIVO: definire una topologia "debole" su E per cui gli insiemi chiusi e limitati di E (rispetto alla norma) risultano compatti per la topologia debole.

ES $E = L^p(a,b)$ $\qquad E = \ell^p$
Teo E Banach ha dimensione finita $\iff$ $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ è compatto.
ES $E = \ell^2$ $\qquad x_n = (0,0,0,\dots \underset{n}{1}, \dots, \dots)$
non ha estratte convergenti

$(E, \|\cdot\|)$ Banach

$E^* = \{ \xi : E \to \mathbb{R} \mid \xi \text{ lineari e continue} \}$ = duale topologico

è uno spazio vettoriale

$\xi : E \to \mathbb{R}$ lineare.
ξ è continua $\iff$ ξ è continua in zero
$\xi(x - x_0) = \xi(x) - \xi(x_0)$

$$\|\xi\|_* := \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}} |\xi(x)| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|\xi(x)|}{\|x\|}$$

COSTANTE di Lipschitz

$$\frac{|\xi(x)-\xi(y)|}{\|x-y\|} = \frac{|\xi(x-y)|}{\|x-y\|} = \frac{|\xi(v)|}{\|v\|} = \left|\xi\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right|$$

ξ è continua in 0

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x\in E \quad \|x\|<\delta \Rightarrow |\xi(x)|<\varepsilon$

$\|x\|<1 \Rightarrow |\xi(x)| < \frac{\varepsilon}{\delta}$

$\|\xi\|_* < \infty$

ξ è continua $\Leftrightarrow$ $\|\xi\|_* < \infty$

<u>Teo</u> $\|\cdot\|_*$ è una norma su E^*, inoltre $(E^*, \|\cdot\|_*)$ è completo (Banach)

<u>dim</u>

- $\|t\cdot\xi\|_* = |t|\,\|\xi\|_*$

$$\|t\xi\|_* = \sup_{\|x\|\le 1} |t\xi(x)| = |t| \sup_{\|x\|\le 1} |\xi(x)| = |t|\,\|\xi\|_*$$

- - $\|0\|_* = 0$ ovvio $\qquad \|\xi\|_* \geq 0.$

$\|\xi\|_* = 0 \Rightarrow \xi = 0$ ovvio

- - - $\|\xi+\eta\|_* \le \|\xi\|_* + \|\eta\|_*$

$$\|\xi+\eta\|_* = \sup_{\|x\|\le 1} |(\xi+\eta)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\xi(x)+\eta(x)|$$

$$\le \sup_{\|x\|\le 1} (|\xi(x)| + |\eta(x)|) \le \sup_{\|x\|\le 1} |\xi(x)| + \sup_{\|y\|\le 1} |\eta(y)|$$

$$= \|\xi\|_* + \|\eta\|_*.$$

E^* è completo?

Sia ξ_n una successione di Cauchy in E^*

Devo mostrare che $\exists \xi \in E^*$ t.c. $\xi_n \to \xi$ ovvero $\|\xi_n - \xi\|_* \to 0$.

ξ_n Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall k, j > N \quad \|\xi_k - \xi_j\|_* < \varepsilon$.

[• Proprietà: $\quad |\xi(x)| \leq \|\xi\|_* \cdot \|x\|$ (per definizione)]

$\forall x \in E$: $\qquad \left|\xi_k(x) - \xi_j(x)\right| \leq \|\xi_k - \xi_j\|_* \cdot \|x\|$
$\leq \varepsilon \cdot \|x\|$.

$\forall x \in E \quad \xi_k(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

$\xi_k(x) \to \xi(x)$ (c'è convergenza puntuale)

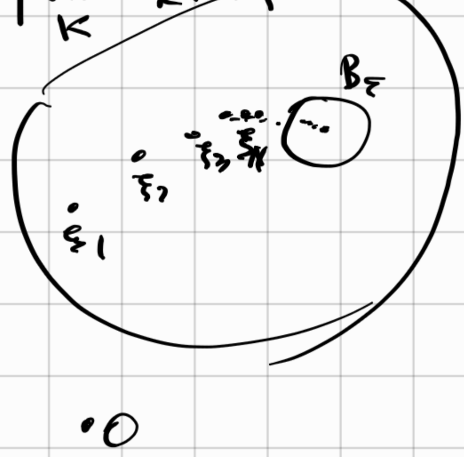
$\xi : E \to \mathbb{R} \qquad \xi \in E^*$?

ξ è lineare: $\quad \xi(\alpha x + \beta y) = \lim_k \xi_k(\alpha x + \beta y) = \lim_k \alpha \xi_k(x) + \beta \xi_k(y)$

ξ_k lineari $\downarrow$

$\alpha \xi(x) + \beta \xi(y)$.

ξ è continua? $\quad \|\xi\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |\xi(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left|\lim_k \xi_k(x)\right|$



$|\xi_k(x)| \leq \|\xi_k\|_* \cdot \|x\| \leq \|\xi_k\|_*$

$\|x\| \leq 1$

ξ_k di Cauchy $\Rightarrow \xi_k$ è limitata

$= \|\xi_k\|_* \leq C$

$\Rightarrow \|\xi\|_* \leq C \Rightarrow \xi \in E^*$.

Sappiamo che $\quad \xi_k(x) \to \xi(x) \quad \forall x \in E \quad$ e $\xi \in E^*$.

$$\|\xi_k - \xi\|_* \leq \|\xi_k - \xi_j\| + \|\xi_j - \xi\|$$

$$\left|(\xi_k - \xi)(x)\right| = \left|\xi_k(x) - \xi(x)\right| \leq \left|\xi_k(x) - \xi_j(x)\right| + \left|\xi_j(x) - \xi(x)\right|$$

Fissato x, fissato k $\qquad \overset{\wedge}{\|\xi_k - \xi_j\|_* \cdot \|x\|} \qquad \downarrow 0$

$\|x\| \leq 1$

$\overset{\wedge}{\|\xi_k - \xi_j\| < \varepsilon}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : k > N \quad \forall \|x\| \le 1 \qquad |(\xi_k - \xi)(x)| < \varepsilon$

$\|\xi_k - \xi\| \le \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_k \|\xi_k - \xi\| = 0 \Rightarrow \xi_k \to \xi.$ $\square$

TOPOLOGIA DEBOLE su E

Se $(E, \|\cdot\|)$ è Banach, $(E^*, \|\cdot\|)$ è Banach.

$\forall \xi \in E^*$ $\qquad E \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$

ξ è continuo. $\qquad$ aperti

- Qual è la topologia meno fine su E che mantiene continue tutte le $\xi \in E^*$?

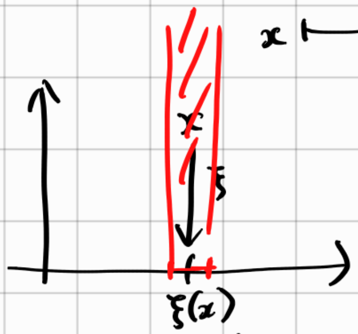
Se tale topologia esiste significa che

$\forall \xi \in E^* \quad \forall U$ intorno di $\xi(x)$

$\xi^{-1}(U)$ sia un intorno di x.

$E \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \xi(x)$



$\Downarrow$

intersezioni finite di intorni devono essere intorni: $\xi_1^{-1}(U_1) \cap \xi_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \xi_N^{-1}(U_N)$

Ogni U tale che $\exists\ \xi_1 \dots \xi_N \in E^*$, $U_1 \dots U_N$ intorni di 0

$$U \supseteq \xi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \xi_N^{-1}(U_N)$$

deve essere un intorno di 0.

La famiglia di questi intorni definisce una topologia σ tale che

- $\xi : (E, \sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua
- ci sono meno intorni possibile (è la meno fine)