Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 4 - 20/3/2013

1 Il frattale *fern* (felce)

Il frattale *fern* si ottiene disegnando una successione di punti generati casualmente sul piano. Se $\boldsymbol{x}$ è un vettore di 2 componenti che rappresenta le coordinate di un punto sul piano, il frattale è generato applicando successivamente delle trasformazioni affini del tipo

$$\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

dove A e $\boldsymbol{b}$ sono una matrice 2×2 e un vettore di dimensione 2 assegnati. Ci sono quattro differenti trasformazioni affini, che vengono scelte con probabilità diversa. Il frattale viene generato disegnando tutti i punti generati in questo modo.

La trasformazione scelta con maggiore probabilità è definita da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Questa trasformazione ruota e "accorcia" un poco $\boldsymbol{x}$, e aggiunge 1.6 alla seconda componente. L'applicazione ripetuta di questa trasformazione muove un punto in alto e verso destra, costruendo la punta della foglia.

Esercizio 1. Scegliere come vettore `x` il vettore di coordinate (1,1), cioè dare il comando `x=[1; 1]`. Applicare 50 volte la trasformazione `x=A1*x + b1` e disegnare sul piano tutti punti ottenuti.

Suggerimento: Costruire una matrice `S` con 2 colonne tale che la riga i-esima contiene le coordinate del vettore `x` al passo i-esimo; per fare questo inizializzare `S` (ad esempio con il comando `S=x';`) e ad ogni passo aggiungere la nuova riga (ad esempio con il comando `S=[S; x'];`). Per disegnare i punti basta scrivere `plot(S(:,1),S(:,2),'*')`.

Le altre tre trasformazioni che vengono scelte con probabilità minore spostano il punto sulla foglia in basso a destra, o sulla foglia in basso a sinistra, o sul gambo. Queste sono ottenute con le tre coppie matrice/vettore:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Esercizio 2. Fare come nell'Esercizio 1 con le coppie matrice/vettore $(A_2, \boldsymbol{b}_2)$, $(A_3, \boldsymbol{b}_3)$, $(A_4, \boldsymbol{b}_4)$.

Il frattale Fern è costruito nel modo seguente. Definiamo il vettore $\boldsymbol{p} = [0.85 \quad 0.92 \quad 0.99 \quad 1]^T$ che rappresenta le probabilità di scegliere una delle 4 trasformazioni. La successione di punti $\{\boldsymbol{x}_k\}_k$ del piano è generata nel seguente modo. Si pone $\boldsymbol{x}_1 = [0.5 \quad 0.5]^T$, e per $k = 1, 2, \ldots,$:

- si sceglie casualmente, con distribuzione uniforme, un numero reale r compreso tra 0 e 1. Se $r \leq p_1$ si pone $i = 1$, se $p_1 < r \leq p_2$ si pone $i = 2$, se $p_2 < r \leq p_3$ si pone $i = 3$, altrimenti si pone $i = 4$;
- si definisce $\boldsymbol{x}_{k+1} = A_i \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}_i$.

Esercizio 3. Si scriva una function `fern(m)` che disegna sul piano i punti rappresentati dai vettori $\boldsymbol{x}_k$, per $k = 1, \ldots, m$.

Suggerimenti:

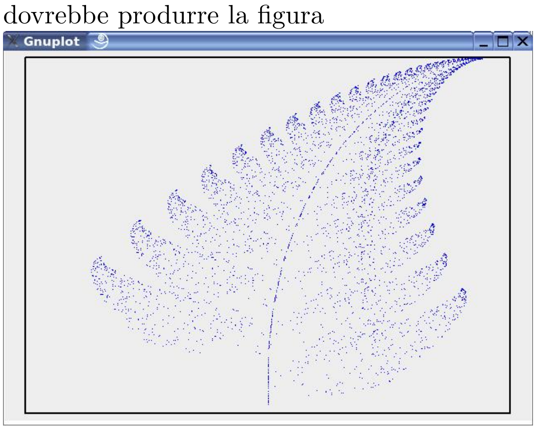
- per generare il numero casuale r utilizzare la funzione `rand`;
- per velocizzare la visualizzazione grafica, memorizzare tutti gli elementi della successione in una variabile `S` (come fatto negli esercizi precedenti), e disegnarli alla fine con un unico comando `plot`.
- dare il comando `axis(''off'')` per rimuovere gli assi cartesiani

Provare con diversi valori di `m` (per testare il funzionamento della function provare con `m` non troppo grande).

Il comando

```
octave:1> fern(5000);
```

dovrebbe produrre la figura



Provare a modificare il vettore p, e l'elemento non zero della matrice A_4. Come cambia la figura?

Esercizio 4. Al sito
`http://www.home.aone.net.au/~byzantium/ferns/fractal.html` trovate dettagli in più su questo frattale. Modificate le matrici A_i e i vettori b_i, utilizzando i parametri suggeriti. Otterrete vai tipi di foglie.

2 Il triangolo di Sierpinski

Generalizziamo l'iterazione che genera il frattale *fern*. Sia n un intero maggiore di 1 e siano $A_1, \ldots, A_n$ matrici reali 2×2 assegnate, e siano $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ vettori di dimensione 2 assegnati. Supponiamo che le matrici A_i e i vettori $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$, siano memorizzati nella matrice C, di dimensione $(2n) \times 3$, definita nel modo seguente:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{b}_1 \\ A_2 & \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Si scriva una function `fract(C, m)` che disegni i punti sul piano generati come descritto di seguito:

- si costruisce il vettore `dets` di dimensione n tale che la componente j di `dets` contiene il modulo di $\det(A_j)$ (per calcolare il determinate si usi il comando `det`);

- si modifica il vettore `dets` nel modo seguente:

  ```
  dets = max(dets, max(dets)/(25*n));
  dets = dets/sum(dets);
  ```

- si crea il vettore `p` di dimensione n con componenti

  ```
  0, dets(1), dets(1)+dets(2), .  .  ., dets(1)+...+dets(n-1)
  ```

- si disegna sul piano il punto le cui coordinate sono gli elementi del vettore $\boldsymbol{x}_k$, per `k=20+1, 20+2,...,20+m`, dove la successione $\{\boldsymbol{x}_k\}$ è definita nel seguente modo:

  1. $\boldsymbol{x}_1$ è scelto in modo casuale
  2. per $k = 1, 2, ...$ si sceglie un numero casuale r compreso tra 0 e 1, si pone `i=sum(p<r)` e si definisce $\boldsymbol{x}_{k+1} = A_i \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}_i$.

Si provi la function con le seguenti matrici:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ s & -x & t \\ x & s & 0 \\ s & x & 0.5 \\ -x & s & x \\ t & 0 & t_2 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

dove $x = \frac{1}{3}\sin(\pi/3)$, $s = 1/6$, $t = 1/3$, $t_2 = 2/3$.

Con la matrice S dovreste ottenere il triangolo di Sierpinski