

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 4 - 6/4/2011

## 1 Il frattale *fern* (felce)

Il frattale *fern* si ottiene generando e disegnando una successione (potenzialmente infinita) di punti casuali sul piano.

Il frattale è generato applicando successivamente trasformazioni affini del tipo

$$\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dove  $\mathbf{x}$  è un vettore di due componenti che rappresenta un punto nel piano,  $A$  e  $\mathbf{b}$  sono una matrice  $2 \times 2$  e un vettore di dimensione 2 assegnati.

Ci sono quattro differenti trasformazioni affini, che vengono scelte con probabilità diversa. La trasformazione scelta con maggiore probabilità è definita da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

Questa trasformazione ruota e “accorcia” un poco  $\mathbf{x}$ , e aggiunge 1.6 alla seconda componente. L'applicazione ripetuta di questa trasformazione muove un punto in alto e verso destra, costruendo la punta della foglia.

Le altre tre trasformazioni che vengono scelte con probabilità minore spostano il punto sulla foglia in basso a destra, o sulla foglia in basso a sinistra, o sul gambo. Queste sono ottenute con le tre coppie matrice/vettore:

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Più precisamente, dato il vettore  $\mathbf{p} = [0.85 \ 0.92 \ 0.99 \ 1]^T$  la successione di punti  $\{\mathbf{x}_k\}_k$  del piano è generata nel seguente modo. Si pone  $\mathbf{x}_1 = [0.5 \ 0.5]^T$ , e per  $k = 1, 2, \dots$ :

- si sceglie casualmente, con distribuzione uniforme, un numero reale  $r$  compreso tra 0 e 1. Se  $r \leq p_1$  si pone  $i = 1$ , se  $p_1 < r \leq p_2$  si pone  $i = 2$ , se  $p_2 < r \leq p_3$  si pone  $i = 3$ , altrimenti si pone  $i = 4$ ;
- si definisce  $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$ .

*Esercizio 1.* Si scriva una function `fern(m)` che disegna sul piano i punti rappresentati dai vettori  $\mathbf{x}_k$ , per  $k = 1, \dots, m$ . *Suggerimenti:*

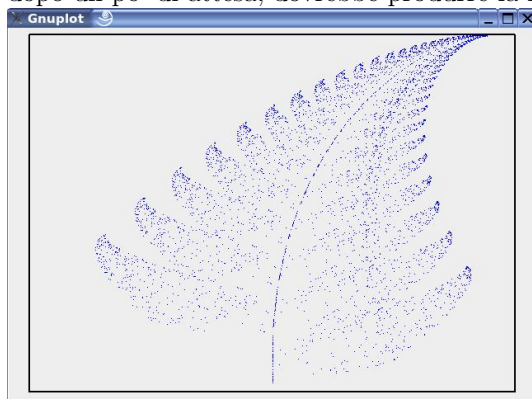
- per generare il numero casuale  $r$  utilizzare la funzione `rand`;
- non memorizzare tutti gli elementi della successioni, e disegnarli quando vengono calcolati (ad esempio mediante il comando `plot(x(1), x(2), 'r')`, se  $\mathbf{x}$  è l'ultimo elemento calcolato;
- ricordarsi di dare i comandi `hold off`, `close all` all'inizio della function per chiudere eventuali finestre grafiche già aperte, seguito dal comando `hold on`;
- prima di iniziare il processo iterativo, dare i comandi `axis([-3 3 0 10])` per fissare il range delle ascisse e delle ordinate, `axis(off)` per rimuovere gli assi cartesiani

Provare con diversi valori di  $m$  (per testare il funzionamento della function provare con  $m$  non troppo grande).

Il comando

```
octave:1> fern(5000);
```

dopo un po' di attesa, dovrebbe produrre la figura



Provare a modificare il vettore  $p$ , e l'elemento non zero della matrice  $A_4$ . Come cambia la figura?

*Esercizio 2.* Al sito

<http://www.home.aone.net.au/~byzantium/ferns/fractal.html> trovate dettagli in più su questo frattale. Modificate le matrici  $A_i$  e i vettori  $\mathbf{b}_i$ , utilizzando i parametri suggeriti. Otterrete vari tipi di foglie.

## 2 Il triangolo di Sierpinski

Generalizziamo l'iterazione che genera il frattale *fern*. Sia  $n$  un intero maggiore di 1 e siano  $A_1, \dots, A_n$  matrici reali  $2 \times 2$  assegnate, e siano  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  vettori di dimensione 2 assegnati. Supponiamo che le matrici  $A_i$  e i vettori  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , siano memorizzati nella matrice  $C$ , di dimensione  $(2n) \times 3$ , definita nel modo

seguinte:

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ A_2 & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

*Esercizio 3.* Si scriva una function `fract(C, m)` che disegni i punti sul piano generati come descritto di seguito:

- si costruisce il vettore `dets` di dimensione  $n$  tale che la componente  $j$  di `dets` contiene il modulo di  $\det(A_j)$  (per calcolare il determinante si usi il comando `det`);
- si modifica il vettore `dets` nel modo seguente:  
`dets = max(dets, max(dets)/(25*n));`  
`dets = dets/sum(dets);`
- si crea il vettore `p` di dimensione  $n$  con componenti  
`0, dets(1), dets(1)+dets(2), . . . , dets(1)+...+dets(n-1)`
- si disegna sul piano il punto le cui coordinate sono gli elementi del vettore  $\mathbf{x}_k$ , per  $k=20+1, 20+2, \dots, 20+m$ , dove la successione  $\{\mathbf{x}_k\}$  è definita nel seguente modo:
  1.  $\mathbf{x}_1$  è scelto in modo casuale
  2. per  $k = 1, 2, \dots$  si sceglie un numero casuale  $r$  compreso tra 0 e 1, si pone  $i=\text{sum}(\mathbf{p}<\mathbf{r})$  e si definisce  $\mathbf{x}_{k+1} = A_i \mathbf{x}_k + \mathbf{b}_i$ .

Si provi la function con le seguenti matrici:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e

$$K = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ s & -x & t \\ x & s & 0 \\ s & x & 0.5 \\ -x & s & x \\ t & 0 & t_2 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $x = \frac{1}{3} \sin(\pi/3)$ ,  $s = 1/6$ ,  $t = 1/3$ ,  $t_2 = 2/3$ .

Con la matrice  $S$  dovrete ottenere il triangolo di Sierpinski

