

Programma del corso di *Teoria della Misura*.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, a.a. 2026/2027.

1. Spazi misurabili, misure positive e costruzione di misure.

Spazi misurabili, spazi mensurali, spazi mensurali completi e completamenti di spazi mensurali, funzioni d'insieme finitamente e numerabilmente additive, misure positive e operazioni sulle misure. Misure esterne, loro proprietà e costruzione di misure complete con il teorema di Carathéodory. Algebre, anelli e semianelli di insiemi, premisure, teorema di estensione di Carathéodory–Hahn e unicità dell'estensione per premisure σ -finite. Applicazione alla costruzione della misura di Lebesgue e delle misure di Lebesgue–Stieltjes, costruzione di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.

2. Funzioni misurabili.

Funzioni misurabili da uno spazio misurabile ad uno spazio topologico, misurabilità rispetto alla composizione, funzioni misurabili a valori in spazi metrici, funzioni misurabili a valori reali estesi e stabilità rispetto a somme, prodotti e passaggio al limite. Funzioni semplici e approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici.

3. Integrazione di funzioni a valori nei reali estesi.

Integrale di funzioni semplici e di funzioni misurabili non negative. Immagine di una misura tramite mappe misurabili e formula per l'integrazione rispetto alla misura immagine. Sommabilità e stabilità per combinazioni lineari. Teorema di Beppo Levi, lemma di Fatou e teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da un parametro. Costruzione “alla Riemann” dell'integrale di Lebesgue, confronto tra integrazione secondo Riemann e integrazione secondo Lebesgue, criterio di Lebesgue per l'esistenza dell'integrale di Riemann.

4. Misure prodotto.

Prodotto di spazi misurabili, sezioni di insiemi e funzioni, rettangoli misurabili e prodotti di misure. Teorema di Tonelli per funzioni misurabili non negative, teorema di Fubini per funzioni integrabili e controesempio che mostra la necessità delle ipotesi.

5. Misure reali e vettoriali in dimensione finita.

Misure con segno, insiemi positivi e negativi, teorema di decomposizione di Hahn, decomposizione di Jordan e sua unicità. Mutua singolarità e assoluta continuità tra misure. Teorema di Radon–Nikodym, decomposizione di Lebesgue di una misura con segno rispetto a una misura positiva. Variazione totale, decomposizione polare e assoluta continuità di misure a valori in uno spazio normato di dimensione finita, assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue come corollario.

6. Misure a valori in spazi di Banach e integrale di Bochner.

Convergenza incondizionata per serie a valori in spazi di Banach, misure a valori in spazi di Banach e integrale di Bochner. Funzioni debolmente misurabili e funzioni fortemente misurabili a valori in uno spazio di Banach, teorema di misurabilità di Pettis, convergenza dominata per l'integrale di Bochner e commutatività con gli operatori lineari e continui tra spazi di Banach. Controesempio alla validità generale del teorema di Radon–Nikodym per misure a valori in spazi di Banach.

7. Misure e topologia.

Misure regolari e misure boreliane, teoremi di approssimazione di boreliani mediante aperti, chiusi e compatti, criterio di Carathéodory per misure boreliane, misure di Radon su spazi topologici e relazioni tra misure sui boreliani e misure boreliane. Teorema di Lusin e densità delle funzioni continue a supporto compatto negli spazi L^p rispetto a una misura di Radon su uno spazio topologico localmente compatto e di Hausdorff, ove $1 \leq p < +\infty$. Topologia della convergenza uniforme sui compatti, teorema di Stone–Weierstrass e separabilità di $C_c(X)$ per spazi metrici X che siano separabili e localmente compatti. Alcune versioni del teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto. Esistenza della misura di Haar in gruppi di Lie riemanniani di dimensione finita e unicità a meno di un fattore positivo.

8. Alcuni risultati basilari sulle misure di Hausdorff.

Costruzione di Carathéodory mediante gauge, misura di Hausdorff in spazi metrici, proprietà basilari, dimensione di Hausdorff e comportamento rispetto a mappe hölderiane. Disuguaglianza isodiametrica e uguaglianza tra misura di Hausdorff n -dimensionale e misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Costruzione di insiemi autosimili e frattali. Area k -dimensionale come misura di Hausdorff euclidea k -dimensionale, formula per l'area k -dimensionale in $\mathbb{R}^n$ e cambiamento di variabile nell'integrale di Lebesgue.

9. Complementi.

Definizione di λ -sistema (o sistema di Dynkin), π -sistema e teorema π - λ di Dynkin. Nozione di classe monotona e teorema delle classi monotone. Confronti tra i due risultati e applicazioni. Convergenza di misure, proprietà di semicontinuità e compattezza debole*, teorema di Prokhorov, insiemi analitici e loro proprietà fondamentali, disintegrazione di una misura rispetto a una mappa misurabile, teorema di ricoprimento di Vitali in spazi metrici, teorema di differenziazione di Lebesgue in spazi metrici doubling, prodotti infiniti di misure di probabilità.