

Elementi di Calcolo in gruppi omogenei.

Laurea magistrale in Matematica.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, a.a. 2025/2026.

Programma del corso

I. Il gruppo di Heisenberg. Diverse rappresentazioni del gruppo di Heisenberg, relazioni con l'Analisi Complessa, la Meccanica Quantistica e le varietà di contatto. Struttura algebrica e metrica del gruppo di Heisenberg.

II. Gruppi di Lie ed algebre di Lie reali. Nozioni preliminari su gruppi e algebre di Lie reali, con cenni al caso infinito dimensionale. Mappa esponenziale e suo differenziale, gruppi di matrici, formula di Baker-Campbell-Hausdorff e formula di Dynkin. Omomorfismi di gruppi di Lie e di algebre di Lie, i tre teoremi fondamentali di Lie, bialiticità della mappa esponenziale per gruppi connessi, semplicemente connessi e nilpotenti.

III. Gradazioni e gruppi di Lie omogenei. Gradazioni di algebre di Lie e gruppi di Lie omogenei. Costruzione di distanze omogenee e distanze subriemanniane, gruppi di Lie graduati, stratificati e di Carnot. Gruppo omogeneo e sua rappresentazione universale. Coordinate graduate, rappresentazione dell'operazione di gruppo e dei campi vettoriali invarianti a sinistra. Misura di Haar in gruppi di Lie localmente compatti, biinvarianza della misura di Lebesgue nei gruppi nilpotenti. Gruppi di tipo H e norma di Cygan.

IV. Introduzione al sublaplaciano. Sublaplaciano e sue funzioni armoniche, soluzione fondamentale del sublaplaciano, spazi di Sobolev intrinseci e disuguaglianza di Poincaré.

V. Calcolo differenziale nei gruppi di Lie stratificati. Calcolo differenziale con il differenziale associato all'operazione di gruppo, teoremi del valor medio, della funzione inversa, del rango e della funzione implicita in gruppi stratificati.

VI. Misura di Hausdorff ed introduzione alla Teoria Geometrica della misura in gruppi omogenei. Proprietà della misura di Hausdorff nei gruppi omogenei e relazioni tra misura di Hausdorff, di Haar e di Lebesgue. Forme differenziali invarianti a sinistra e pesi delle k-forme e dei k-campi vettoriali. Misura di area intrinseca, differenziabilità di misure in spazi metrici, fattore sferico, problema dell'area intrinseca delle superfici, peso delle superfici e relazione con la loro dimensione di Hausdorff rispetto la distanza omogenea.