Introduzione

Siano V , W spazi vettoriali (reali e di dimensione finita), $f : \Omega \to W$ una applicazione differenziabile su un aperto $\Omega \subset V$ ed $x_0 \in \Omega$ un punto fissato.
Lo sviluppo di Taylor di f è una serie formale

$$T(f) = \sum_{p \geq 0} T^p(f)$$

ove $T^p(f) : V \to W$ è una applicazione polinomiale omogenea di grado p (ossia esiste $b : V^p \to W$ che è $p-$lineare alternante e tale che $b(x, \dots, x) = T^p(f)(x)$).

Tali polinomi sono indipendenti da ogni identificazione di V , W con gli spazi standard $\mathbb{R}^n$ (sistemi di coordinate lineari). Ma ciò non è più vero per cambiamenti di coordinate non lineari. Ad esempio la funzione di una variabile $f(x) = x$, cambiando (in modo non lineare) coordinata su $\mathbb{R}$ può divenire la funzione $x + x^2$ oppure la $x - x^2$ e quindi il polinomio di secondo grado del suo sviluppo di Taylor può essere identicamente nullo o positivo o negativo a seconda del sistema di coordinate usato. Se si studia una funzione $f : X \to W$ definita su una varietà differenziabile X ed a valori in uno spazio vettoriale W (ad esempio $W = \mathbb{R}$) i polinomi del suo sviluppo di Taylor in un punto x_0 (fatti utilizzando un qualche sistema di coordinate) non sono in generale interpretabili come funzioni intrinsecamente definite sullo spazio tangente $T(X)_{x_0}$. Fanno eccezione il termine di grado zero (il valore di f in x_0) ed il primo dei T^p non identicamente nullo tra quelli con $p > 0$. Ad esempio $T^1(f)$ è in ogni caso una applicazione ben definita da $T(X)_{x_0}$ in W : essa è precisamente il differenziale di f. Se tale differenziale è nullo in x_0 , allora $T^2(f)$ diviene intrinsecamente definito come applicazione da $T(X)_{x_0}$ a W . Se poi anch'esso è nullo (identicamente) allora è $T^3(f)$ ad avere un significato intrinseco.

Per poter dare un significato intrinseco all'hessiano ((termine del secondo ordine nello sviluppo di Taylor) di una $f : X \to W$ anche nei punti ove df non è nullo dobbiamo fissare un modo per differenziare il differenziale di f, inteso come sezione del fibrato cotangente ad X, ed ottenere una applicazione (quadratica) su ogni $T(X)_x$ a valori in W.

Poniamoci quindi in generale il problema di cosa possa essere un modo di differenziare le sezioni di un fibrato.

Siano X una varietà differenziabile di dimensione n ed $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale di rango r. Per $x \in X$ la struttura lineare di $E_x = \pi^{-1}(x)$ è fissata ma nessuna identificazione privilegiata di esso con $\mathbb{R}^r$ è data. Se su un aperto $U \subset X$, si banalizza E, ossia si fissa (in modo differenziabile) per ogni $x \in U$ una identificazione di E_x con $\mathbb{R}^r$, allora le sezioni di E su U sono individuate da funzioni $f : U \to \mathbb{R}^r$; dobbiamo però ricordare che i valori di f in $x \in U$ sono presi sull'$\mathbb{R}^r$ che parametrizza E_x e quindi stanno in spazi diversi per x diversi. Se vogliamo differenziare in un $x \in U$ una tale f pensata come sezione, dobbiamo definire il differenziale come una applicazione lineare di $T(X)_x$ in $\mathbb{R}^r = E_x$. Le componenti di una tale applicazione lineare devono quindi cambiare con i cambiamenti di riferimento su E_x: il "differenziale" di f deve essere un oggetto che per ogni $x \in X$ dà una applicazione lineare di $T(X)$ in E_x; se la sezione è definita sull'aperto U, il suo differenziale assocerà ad ogni campo di vettori tangenti su U una sezione di E su U. Questi oggetti saranno detti $1-$forme differenziali a valori in E; la loro introduzione ci permetterà di precisare cosa significhi fissare un modo di differenziare le sezioni di un fibrato.

In un primo paragrafo mostreremo come i fibrati vettoriali su una varietà differenziabile possano essere trattati da tre punti di vista diversi che chiameremo rispettivamente *puntuale* , *locale* e *globale* e come questi siano equivalenti tra loro. Ciò ci porterà ad una completa algebrizzazione della teoria delle connessioni nel linguaggio algebro-geometrico degli schemi di cui daremo una introduzione elementare. In tale generalità, il confronto tra i punti di vista locale e globale che non sono più equivalenti, deve necessariamente essere espresso nel linguaggio delle coomologia dei fasci

Credo che tale trattazione, pur nella sua astrattezza, guadagni in compenso grandemente in chiarezza concettuale e in concisione espositiva.

In tutto quel che segue ogni anello sarà supposto commutativo e con identità moltiplicativa diversa da quella additiva. Ogni omomorfismo di anelli sarà supposto conservare l'identità.

Fibrati vettoriali

Notazioni: la categoria delle applicazioni.

Sia $\pi : E \to X$ una applicazione tra insiemi. Per $x \in X$, l'insieme $\pi^{-1}(x)$ viene detto la *fibra* di π su x e sarà indicato con E_x se non vi è ambiguità su chi sia π. Possiamo quindi pensare ad E come ad una famiglia di insiemi (le fibre di π) parametrizzata dai punti di X.

Un *morfismo* di $\pi : E \to X$ in $\pi' : E' \to X'$ è una coppia di applicazioni $\phi : E \to E'$ e $f : X \to X'$ tali che sia commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Tale commutatività equivale ad asserire che per ogni $x \in X$ la fibra di π su x viene inviata da ϕ entro la fibra di π' su $f(x)$ inducendo quindi una applicazione $\phi_x : E_x \to E'_{f(x)}$. Dare un tale morfismo equivale quindi ad assegnare la f e la famiglia $(\phi)_{x\in X}$. Un tale oggetto sarà detto *morfismo* tra *famiglie di insiemi.*

Sia X uno spazio topologico. Un *fibrato vettoriale* su X consiste dei dati seguenti:
- una applicazione continua $\pi : E \to X$
- una struttura di spazio vettoriale (per il momento su $\mathbb{R}$) su E_x per ogni $x \in X$

cui richiediamo di soddisfare la condizione di locale semplicità seguente:
- per ogni $x \in X$ esistono un suo intorno U , uno spazio vettoriale (reale) V, ed un omeomorfismo h di $U \times V$ con $\pi^{-1}(U)$ tale che per $x \in U$ l'applicazione $V \ni v \mapsto h(x, v) \in E_x$ sia lineare.

Se gli spazi topologici che trattiamo posseggono qualche struttura aggiuntiva (ad esempio sono varietà differenziabili, o si ha altra restrizione sulla regolarità dei morfismi), le stesse possono essere imposte ai fibrati, ottenendo ad esempio la nozione di fibrato vettoriale differenziabile su una verietà differenziabile.

Dalla definizione data, la dimensione della fibra (in quanto spazio vettoriale) di un fibrato $\pi : E \to X$ è una funzione localmente costante di $x \in X$. Supporremo di solito che essa sia costante e la chiameremo *rango* del fibrato: saremo sicuramente in tale situazione se X è connesso.

Un morfismo di un fibrato vettoriale $\pi : E \to X$ in un altro $\pi' : E' \to X'$ è un morfismo (ϕ, f) tra famiglie di insiemi tali che $\phi_x : E_x \to E'_{f(x)}$ sia lineare per ogni $x \in X$. Chiameremo *banale* un fibrato vettoriale isomorfo ad un fibrato "costante" , ossia uno del tipo $X \times \mathbb{R}^n \to X$.

Si è così definita la categoria dei fibrati vettoriali. Particolarmente interessante è la sottocategoria dei fibrati in cui la base X è stata fissata ed i morfismi sono solo quelli che inducono l'identità su X (ossia $f : X \to X$ è l'identità).

Descriveremo ora un metodo generale di costruzione dei fibrati vettoriali richiamando prima un metodo analogo di costruzione di varietà differenziabili.

Sia X un insieme qualsiasi. Una *carta* su X è una coppia (U, h) ove $U \subset X$ è un sottoinsieme e h una applicazione biunivoca tra U ed un aperto di $\mathbb{R}^n$. Due tali carte (U_i, h_i) per $i = 1, 2$ sono dette *compatibili* se l'applicazione biunivoca di $h_1(U_1 \cap U_2)$ con $h_2(U_1 \cap U_2)$ indotto dalla composizione di h_2 con h_1^{-1} è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Un *atlante regolare* su X è il dato di una famiglia di carte $(U_i, h_i)_{i \in I}$ su X a due a due compatibili, tali che $(U_i)_{i \in I}$ sia un ricoprimento di X e tali che sia di Hausdorff la topologia su X in cui un sottoinsieme $A \subset X$ è un aperto se e solo se per ogni carta (U_i, h_i) l'insieme $h_i(A \cap U_i)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$.
E' chiaro che un tale atlante individua una struttura di varietà (astratta) su X.

La condizione che la topologia di X venga di Hausdorff viene posta per evitare fenomeni del seguente tipo:
si incollino due copie di $\mathbb{R}$ identificando punti con la stessa ascissa se essa è diversa da zero: insiemisticamente il quoziente X può essere pensato come una retta in cui l'origine è stata sdoppiata in due punti; su tale X vi sono due carte compatibili tra loro ma che non verificano la condizione topologica. In generale questa sarà soddisfatta se per ogni coppia di carte date su X, la corrispondenza associata ha *grafico* chiuso nel prodotto: ossia se $\{(h_1(x), h_2(x)) \ : \ x \in U_1 \cap U_2\}$ è chiuso in $h_1(U_1) \times h_2(U_2)$. (Si rammenti che uno spazio è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$).

Ad esempio si controlli che se $X = \mathcal{G}r(p, n)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione p in $\mathbb{R}^n$ (verrà detta la *grasmanniana* dei $p-$piani in $\mathbb{R}^n$), i seguenti dati costituiscono un atlante regolare :
detto N un insieme di n elementi (ad esempio $N = \{1, \ldots, n\}$), si identifichi $\mathbb{R}^n$ con l'insieme $\mathbb{R}^N$ delle applicazioni di N in $\mathbb{R}$. Per ogni sottoinsieme $P \subset N$ costituito da p elementi sia $k_P : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^P, \mathbb{R}^{N-P}) \to \mathcal{G}r(p, n)$ l'applicazione che associa ad ogni applicazione lineare il suo grafico; ogni tale k_P è iniettiva e quindi la sua inversa h_P è una carta. Tali h_P, al variare di P tra i sottoisiemi di cardinalità p in I, danno a $\mathcal{G}r(p, n)$ una struttura di varietà differenziabile.

Sia ora X uno spazio topologico (oppure una varietà differenziabile) e sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto. Per ogni $i \in I$ consideriamo il fibrato vettoriale banale $U_i \times \mathbb{R}^p$ e supponiamo che per ogni $(i, j) \in I^2$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sia assegnata una applicazione continua (oppure differenziabile se ciò ha senso) $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathcal{G}l(\mathbb{R}^p)$. Nell'unione disgiunta di tali fibrati banali si incolli un punto $(x, v_i) \in U_i \times \mathbb{R}^p$ con $(y, v_j) \in U_j \times \mathbb{R}^p$ se e solo se $x = y \in U_i \cap U_j$ e $v_j = f_{ij}(x)[v_i]$. Se per ogni $(i, j, k) \in I^3$ ed $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ si ha $f_{ij}(x) \circ f_{jk}(x) =$

$f_{ik}(x)$ allora il quoziente per tale relazione definisce un fibrato vettoriale su X. Anzi ogni fibrato vettoriale su X è ottenibile così per qualche ricoprimento aperto $\mathcal{U}$, basta che tale fibrato sia banale sui suoi elementi (ciò accade per ogni fibrato se gli elementi di $\mathcal{U}$ hanno componenti connesse contrattili).

Le usuali costruzioni funtorialmente definite $\oplus$, $\otimes$, $\wedge$, Hom , etc. tra spazi vettoriali (di dimensione finita) e le relazioni tra essi portano ad analoghe costruzioni (che possono essere chiamate di tipo puntuale) tra fibrati vettoriali su M verificanti le corrispondenti identificazioni naturali. Così ad esempio se E ed F sono fibrati vettoriali, si definisce il fibrato $\mathrm{Hom}(E, F)$ prendendo come insieme supporto quello costituito dalle coppie (x, ϕ) con $x \in M$ e ϕ un omomorfismo di E_x in F_x e fissando banalizzazioni locali nel seguente modo: se H , K sono spazi vettoriali (di dimensione finita) e su un aperto $U \subset M$ si hanno banalizzazioni $E_U \simeq U \times H$ e $F_U \simeq U \times K$, si identifica la parte di $\mathrm{Hom}(E, F)$ che stà sopra U con il prodotto $U \times \mathrm{Hom}(H, K)$.

In modo analogo si ripetono tutte le altre costruzioni. E' inoltre evidente da tali descrizioni per banalizzazioni locali che le relazioni esistenti tra costruzioni naturali tra spazi vettoriali di dimensione finita sono verificate dalle analoghe tra fibrati. Ad esempio si ha un isomorfismo naturale tra il fibrato $E^* \otimes F$ ed il fibrato $\mathrm{Hom}(E, F)$.

Una *sezione* di un fibrato vettoriale $\pi : E \to X$ è una applicazione continua (oppure differenziabile quando ciò ha senso) $s : X \to E$ tale che $\pi(s(x)) = x$ per ogni $x \in X$.

Le sezioni di E costituiscono un modulo $\Gamma(E)$ sull'anello delle funzioni continue (differenziabili nel caso differenziabile) su X a valori reali.

E' facile mostrare che un fibrato vettoriale di rango p è banale se e solo se esistono p sue sezioni $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(E)$ tali che $s_1(x), \ldots, s_p(x)$ siano linearmente indipendenti (in E_x) per ogni $x \in X$.

Lemma 1 *Siano $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(E)$. Sono fatti equivalenti:*

1. *$s_1(x), \ldots, s_r(x)$ generano E_x per ogni $x \in X$*
2. *$s_1, \ldots s_r$ generano $\Gamma(E)$ su $\mathcal{E}$*

Analogo enunciato nel caso differenziabile

Dim. 1.⇒2. Se $s_1(x), \ldots s_p(x)$ sono una base di E_x lo sono anche per x' in qualche suo intorno. Ne segue che se $s \in \Gamma(E)$, per ogni $x \in X$ esistono funzioni continue $f_1, \ldots f_r$ su un suo intorno U_x tali che $s(x') = \sum_1^r f_i(x') s_i(x')$. utilizzando una partizione dell'unità si esprime s come combinazione delle $s_1, \ldots, s_r$ a coefficienti funzioni continue su X.
2.⇒1. Sia $v \in E_x$; utilizzando una banalizzazione locale di E ed una funzione "test" si costruisce una sezione globale s di E per cui $s(x) = v$. Per ipotesi $s = \sum_1^r f_i s_i$; calcolando nel punto x si ottiene v come combinazione lineare degli $s_i(x)$.

Diremo che E è di *tipo finito* se esiste qualche ricoprimento aperto finito di X sui cui elementi E sia banale.

Proposizione 2 *Sia $\pi : E \to X$ un fibrato vettoriale. Sono fatti equivalenti:*

1. *E è di tipo finito*
2. *le sue sezioni costituiscono un modulo $\Gamma(E)$ che è finitamente generato sull'anello $\mathcal{E}$ delle funzioni continue su X a valori reali*
3. *esiste un altro fibrato vettoriale F tale che $E \oplus F$ sia banale*

Analogo enunciato nel caso differenziabile.

Dim. 1.$\Rightarrow$ 2. Siano $F \subset U$ un chiuso ed un aperto in X e sia $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{R}^p$ una banalizzazione di E su U. Esiste una funzione $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua con supporto contenuto in U e che vale 1 nei punti di F. Dette $u_1, \ldots, u_p$ le coordinate su $\mathbb{R}^p$, i prodotti $s_i = \phi u_i$ per $i = 1, \ldots, p$ inducono sezioni di E su tutto X che in ogni punto $x \in F$ costituiscono una base di E_x. Se E è di tipo finito si possono trovare $F_1 \subset U_1, \ldots, F_N \subset U_n$ con $F_1 \cup \ldots \cup F_N = X$ ottenendo Np elementi di $\Gamma(E)$ che per il lemma precedente generano $\Gamma(E)$.
2.$\Rightarrow$1. Siano $s_1, \ldots, s_r$ generatori di $\Gamma(E)$. Consideriamo l'applicazione $\phi : X \times \mathbb{R}^r \to E$ definita da $\phi(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \sum_1^r \lambda_i s_i(x)$. Per il lemma precedente essa è surgettiva. Sia $F = \{(x; \lambda) \in X \times \mathbb{R}^r \ : \ \phi(x; \lambda) = 0$. Sarà sufficiente mostrare che F è un sottofibrato di $X \times \mathbb{R}^r$. Supponiamo che $s_1(x_0), \ldots, s_p(x_0)$ costituiscano una base di E_{x_0}; allora in un intorno di x_0 ogni sezione si scrive in modo unico nella forma $f_1 s_1 + \ldots + f_p s_p$ con le f_i continue su U. Esprimendo in tal modo le $s_{p+1}, \ldots, s_r$ si costruisce un isomorfismo tra $U \times \mathbb{R}^{r-p}$ e F_U.
3.$\Rightarrow$1. Sia $E \oplus F \simeq X\mathbb{R}^r$. Le prime componenti delle sezioni della base standard di $\Gamma(X \times \mathbb{R}^r)$ costituiscono un sistema di generatori $s_1, \ldots, s_r$ di $\Gamma(E)$. Per ogni $\Delta \subset \{1, \ldots, r\}$ di cardinalità p, sia U_Δ l'insieme degli $x \in X$ tali che $(s_i(x))_{i \in \Delta}$ è una base di E_x. Tali U_Δ costituiscono un ricoprimento aperto finito di X sul quale E è banale cosicché E è di tipo finito.

Teorema 3 *Un fibrato differenziabile su una varietà differenziabile è banale se e solo se è topologicamente banale.*

Dim. Si può introdurre una topologia sullo spazio delle sezioni continue in modo analogo a quello che si fa per le applicazioni continue a valori in $\mathbb{R}^p$ e si dimostra che le sezioni differenziabili sono un sottoinsieme denso; se il fibrato è topologicamente banale, esso ha p sezioni continue linearmente indipendenti in ogni $x \in X$; approssimando queste con sezioni differenziabili si ottengono ancora sezioni linearmente indipendenti e quindi una banalizzazzione differenziabile.

Un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di uno spazio topologico X è detto di dimensione al più n se ogni intersezione di $n+2$ suoi elementi distinti è vuota. Diremo che X ha dimensione di Lebesgue al più n se è localmente compatto a base numerabile ed i suoi ricoprimenti aperti di dimensione al più n sono arbitrariamente fini.
Si dimostra ad esempio che una varietà topologica di dimendione n ha dimensione al più n (è un pò più difficile mostrare che non ha dimensione al più $n-1$ ossia che ha effettivamente dimensione n).

Lemma 4 (detto di Nelson) *Uno spazio di dimensione di Lebesgue al più n in cui sia stato fissato un ricoprimento aperto può essere ricoperto da $n+1$ aperti ogni componente connessa dei quali sia contenuta in qualche aperto del ricoprimento dato*

Dim. Possiamo supporre che il ricoprimento dato $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ sia di dimensione al più n. Sia $(\phi_i)_{i\in I}$ una partizione dell'unità subordinata; indichiamo con $|\Delta|$ la cardinalità di un sottoinsieme $\Delta \subset I$ con ϕ_Δ la funzione definita per $x \in X$ da :

$$\phi_\Delta(x) = \sum_{i\in\Delta} \phi_i(x)$$

con V_Δ l'insieme degli $x \in X$ con $\prod_{i\in\Delta} \phi_i(x) \neq 0$ e con U_Δ l'insieme:

$$U_\Delta = \{x \in V_\Delta \ : \ \phi_\Delta(x) > \phi_{\Delta'}(x) \ \text{ per } \ \Delta' \subset I \ , \ \Delta' \neq \Delta \ , \ |\Delta'| = |\Delta|\}$$

Tali U_Δ sono aperti perchè $\mathcal{U}$ è localmente finito, sono evidentemente $\mathcal{U}-$piccoli, e U_Δ è disgiunto da $U_{\Delta'}$ se $|\Delta| = |\Delta'|$; inoltre si ha $U_\Delta = \emptyset$ per $|\Delta| > n+1$. Gli $n+1$ aperti:

$$\Omega_p = \bigcup_{|\Delta|=p} U_\Delta$$

per $p = 1, \ldots, n+1$ soddisfano le proprietà richieste.

Come corollario si ottiene il seguente:

Teorema 5 *Ogni fibrato vettoriale su uno spazio di dimensione di Lebesgue finita è di tipo finito*

Indichiamo un'altra dimostrazione dell'ultimo teorema nel caso differenziabile che utilizza la nozione di trasversalità la posto di quella di dimensione di Lebesgue. Si consideri per r intero naturale il fibrato E^r somma diretta di r copie di E; una sezione di E^r corrisponde quindi alla scelta di r sezioni di E. Per $x \in X$ sia Σ_x l'insieme dei $(v_1, \ldots, v_r) \in E_x^r$ tali che $v_1, \ldots, v_r$ non generino E_x e sia $\Sigma = \bigcup_{x\in X} \Sigma_x$. Vogliamo mostrare che per $r >> 1$, esistono sezioni di E^r , che non "toccano" Σ. Ora se $r \geq p$ =rango di E, la codimensione di Σ in E coincide con la codimensione di Σ_x in E_x ed è $r-p+1$; se $n < r-p+1$ ossia $r > n+p-1$ esistono per trasversalità sezioni che evitano Σ.
Nota: Come spesso accade nell'uso della trasversalità, l'insieme Σ da evitare non è una varietà ma solo un insieme stratificato in varietà e ciò richiede certi ragionamenti aggiuntivi che sono d'altra parte standard per tale teoria e sui quali non ci sofferemeremo.

Consideriamo i fibrati vettoriali su una base fissata X e sia $\mathcal{E}$ l'anello delle funzioni continue(differenziabili nel caso differenziabile) su X a valori reali. Ad ogni fibrato E su X associamo l'$\mathcal{E}-$modulo $\Gamma(E)$ delle sue sezioni; ad ogni omomorfismo tra fibrati $\phi : E \to F$ corrisponde un omomorfismi di $\mathcal{E}-$moduli $\phi_* : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$. Si ha così un funtore dalla categoria dei fibrati su X nella categoria degli $\mathcal{E}-$moduli. Nel prossimo paragrafo mostreremo che tale funtore è, in certe ipotesi, una equivalenza con una categoria di $\mathcal{E}-$moduli : quelli che sono fattori diretti di un modulo libero finito, ossia uno del tipo $\mathcal{E}^r$. Ciò avviene ad esempio nel caso di varietà differenziabili ma non per varietà algebriche; in questo secondo caso dovremo utilizzare l'interpretazione dei fibrati in termini di fasci localmente liberi che sarà descritta in un paragrafo successivo.

Moduli proiettivi

Sia P un modulo su un anello commutativo fissato R. Assegnando ad ogni $R-$modulo M l'$R-$modulo $\mathrm{Hom}(P,M)$ degli omomorfismi di P in M si ha un funtore *esatto a sinistra* ossia tale che per ogni successione esatta di $R-$moduli:

$$0 \to M' \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\alpha} M'' \to 0$$

sia esatta anche la:

$$0 \to \mathrm{Hom}(P,M') \xrightarrow{j_*} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(P,M')$$

Non è detto invece che α_* sia surgettiva, ossia il funtore $\mathrm{Hom}(P,\ )$ non è in generale esatto a destra. Ad esempio per $R = \mathbb{Z}$ la successione:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/(2\cdot\mathbb{Z}) \to 0$$

ove j è la moltiplicazione per 2, dà un α_* non surgettivo.

Def. Diremo che l'$R-$modulo P è *proiettivo* se il funtore $\mathrm{Hom}(P,\ )$ è esatto; ossia se per ogni omomorfismo surgettivo $M \xrightarrow{\alpha} M''$, ogni $f'' : P \to M''$ è del tipo $f'' = \sigma \circ f$ per qualche $f : P \to M$.

Def. Sia $\nu : S \to L$ una applicazione di un insieme S in un $R-$modulo L. Diremo che L è *libero su* ν se per ogni applicazione $\phi : S \to M$ di S in un $R-$modulo M, esiste uno ed un solo omomorfismo $f : P \to M$ tale che $f \circ \nu = \phi$. Un $R-$modulo è detto *libero* se è libero su qualche applicazione $\nu : S \to L$.

Nota: Sostanzialmente gli $R-$moduli liberi sono tutti del seguente tipo: si dà un insieme S e si considera l'$R-$modulo L costituito dalle funzioni $f : S \to R$ aventi supporto finito. La "base" di tale L è data dagli elementi di $s \in S$, essendo ognuno di essi identificato alla funzione che vale uno in s e zero in tutti gli altri; allora la funzione che assume in $s_1, \ldots, s_r$ i valori $a_1, \ldots, a_r$ e che vale zero in tutti gli altri elementi di S "diviene" la combinazione lineare $a_1 \cdot s_1 + \ldots + a_r \cdot s_r$. E così L viene detto l'$R-$modulo libero delle combinazioni lineari di elementi di S a coefficienti in R.

E' una facile verifica formale che ogni modulo libero è proiettivo. Più in generale ricordiamo che un sottomodulo $P \subset M$ è detto un *fattore diretto* se esiste un altro sottomodulo $Q \subset M$ tale che $P \cap Q = (0)$ e $P + Q = M$; equivalentemente se esiste un endomorfismo di M in se avente per immagine P e tale che $\sigma^2 = \sigma$.

Proposizione 6 *Per un $R-$modulo P sono fatti equivalenti:*
- *P è proiettivo*
- *P è fattore diretto di un libero*
- *ogni successione esatta $0 \to Q \to M \to P \to 0$ è isomorfa alla successione esatta $0 \to Q \to Q \oplus P \to P \to 0$*

La dimostrazione utilizza solo il fatto che ogni modulo è quoziente di un modulo libero e che una successione esatta corta:

$$0 \to M' \xrightarrow{j} M \xrightarrow{\alpha} P \to 0$$

" è" una somma diretta se e solo se esiste un omomorfismo $\sigma : P \to M$ tale che $\alpha \circ \sigma$ sia l'identità su P.

Nel caso che R sia un anello (integro) ad ideali principali non vi è distinzione tra moduli liberi e moduli proiettivi; infatti un teorema classico assicura che in tal caso ogni sottomodulo di un modulo libero è libero.

Ricordiamo che un modulo è detto *finito* se è finitamente generato.
Abbiamo visto che un modulo P è proiettivo se e solo se esso è un fattore diretto di un modulo libero. E' facile verificare che se inoltre P è finito, esso è un fattore diretto di un modulo libero finito; ossia esistono un modulo Q ed un isomorfismo tra $P \oplus Q$ ed R^n per qualche intero n. Infatti scelti generatori $f_1, \ldots, f_n$ di P si ottiene un omomorfismo surgettivo $\sigma : R^n \to P$ ponendo:

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \sum_1^n a_i f_i$$

Essendo P è proiettivo, esiste un omomorfismo $\nu : P \to R^n$ che rileva l'identità $i_d : P \to P$, ossia tale che $\sigma \circ \nu = i_d$; si identifichi P alla sua immagine in R^n tramite ν. Allora il nucleo Q di σ è un sottomodulo di R^n tale che $P \cap Q = (0)$ e $P + Q = R^n$; ossia R^n è la somma diretta tra P e Q. Essendo la proiezione di $\mathbb{R}^n$ su Q surgettiva sarà anchesso finito. Si è così dimostrato la seguente:

Proposizione 7 *P è un modulo proiettivo finito se e solo se esiste un modulo proiettivo finito Q ed un isomorfismo tra $P \oplus Q$ ed R^n per qualche intero n.*

Equivalenza tra fibrati vettoriali e moduli proiettivi finiti

Sia E un fibrato vettoriale di rango p su una varietà differenziabile X il cui anello di funzioni differenziabili sarà indicato con $\mathcal{E}$.
Abbiamo visto che esso può essere pensato come sottofibrato di un fibrato banale $X \times \mathbb{R}^{p+q}$ ove possiede come supplementare un sottofibrato F di rango q. Ne segue che $\Gamma(E) \oplus \Gamma(F) \simeq \mathcal{E}^{p+q}$ e quindi, per quanto visto nel precedente paragrafo, che $\Gamma(E)$ è un $\mathcal{E}-$modulo proiettivo finito.
Viceversa, sia P un $\mathcal{E}-$modulo proiettivo finito e siano $s_1, \ldots, s_n$ suoi generatori. Sia $\phi : \mathcal{E}^n \to P$ l'omomorfismo surgettivo definito da:

$$\phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_1^n \lambda_i \cdot s_i$$

Essendo P proiettivo, ϕ ha una inverso destro ossia un omomorfismo $\sigma : P \to \mathcal{E}^n$ tale che $\phi \circ \sigma = id$. Identifichiamo P tramite σ ad un sottomodulo di $\mathcal{E}^n$; l'endomorfismo $\sigma \circ \phi$ di $\mathcal{E}^n$ rappresenta allora la proiezione $\mathcal{E}^n \to P$ relativa alla decomposizione $\mathcal{E} = P \oplus Q$ ove $Q = \ker(\phi)$. Se A è la matrice quadrata d'ordine n a coefficienti in $\mathcal{E}$ associata all'endomorfismo $\sigma \circ \phi$ si ha quindi $A^2 = A$. Per $x \in X$ siano $p(x)$ e $q(x)$ rispettivamente i ranghi delle matrici $A(x)$ e $I - A(x)$; esse sono funzioni semicontinue inferiormente con somma costante $(= n)$ e sono quindi localmente costanti su X. Si consideri l'applicazione $\Phi : X \times \mathbb{R}^n$ in se definita dalla matrice A; ossia dalla formula:

$$\Phi(x; \lambda) = (x; A(x)[\lambda])$$

Si verifica che l'immagine di tale applicazione è un sottofibrato E di $X \times \mathbb{R}^n$ (di rango costante se $p(x)$ è costante, ad esempio se X è connessa) e che si ha un isomorfismo naturale tra P e $\Gamma(E)$.

Quindi il funtore che ad un fibrato vettoriale E su X associa l'$\mathcal{E}-$modulo $\Gamma(E)$ delle sue sezioni e che sarà chiamato *funtore delle sezioni globali*, ha per immagine i moduli proiettivi finiti.
Per mostrare che questa è una equivalenza di categorie occorre mostrare anche che se E_1 , E_2 sono fibrati vettoriali su X, l'applicazione che ad un morfismo $\phi \in$Hom(E_1, E_2) associa $\phi_* \in$Hom$(\Gamma(E_1), \Gamma(E_2))$ è biunivoco. Ciò si può fare facilmente utilizzando sezioni a supporto entro aperti sui quali i fibrati si banalizzano ed in definitiva si ottiene il seguente:

Teorema 8 *La categoria dei fibrati vettoriali su una varietà differenziabile X è equivalente alla categoria dei moduli proiettivi finiti sull'anello delle funzioni differenziabili su X*

Il fatto che tali categorie siano equivalenti ha per conseguenza che ogni costruzione naturale, ossia definita in termini categoriali, commuta con tale funtore. Così ad esempio se E , F sono fibrati vettoriali su X,

l'$\mathcal{E}-$modulo Hom$(\Gamma(E), \Gamma(F))$ è isomorfo al modulo $\Gamma(\text{Hom}(E, F))$. Sapendo poi che il fibrato Hom(E, F) è isomorfo al prodotto tensoriale $E^* \otimes F$ tra il duale di E ed F se ne può dedurre che Hom$(\Gamma(E), \Gamma(F))$ è isomorfo al prodotto tensoriale (su $\mathcal{E}$) del duale (su $\mathcal{E}$) di $\Gamma(E)$ per il modulo $\Gamma(F)$.

Chiameremo considerazioni di tipo *puntuale* quelle fatte nel linguaggio dei fibrati e di tipo *globale* quelle espresse in termini dei moduli delle sezioni globali. Come abbiamo visto nel caso di varietà differenziabili esse si equivalgono. Ma ciò non accade per altre strutture come le varietà algebriche o quelle analitiche complesse; ad esempio se una varietà complessa è compatta (e connessa) le funzioni olomorfe globali sono solo le costanti ed in genere il modulo delle sezioni (olomorfe) di un fibrato è troppo piccolo per permettere il riconoscimento del fibrato stesso. Il prossimo paragrafo utilizza la nozione di fascio per costruire un linguaggio che può essere detto di tipo *locale* che è equivalente in ogni caso a quello puntuale e che serve da intermediario con quello globale.

Il linguaggio dei fasci

L'insieme τ^* degli aperti non vuoti in uno spazio topologico X può essere pensato come una categoria i cui morfismi sono le inclusioni. Un *prefascio* di anelli su X è per definizione un funtore contravariante $\mathcal{O}$ da τ^* nella categoria degli anelli. Ossia per ogni aperto non vuoto è dato un anello $\mathcal{O}(U)$; per ogni inclusione di aperti $U \subset V$ è dato un omomorfismo di anelli $r_U^V : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ detto di *restrizione*, di modo che se $U \subset V \subset W$ si abbia $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$ e $r_U^U =$identità.

Un tale prefascio $\mathcal{O}$ è detto un *fascio* se per ogni famiglia di aperti non vuoti $(U_i)_{i \in I}$ con $\bigcup_{i \in I} U_i = U$, l'applicazione di $\mathcal{O}(U)$ in $\prod_{i \in I} \mathcal{O}(U_i)$ definita da $f \mapsto (r_{U_i}^U(f))_{i \in I}$ è iniettiva ed ha per immagine il sottoinsiame delle $(f_i)_{i \in I}$ tali che $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$ per ogni $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Sia fissato un prefascio di anelli $\mathcal{O}$ sullo spazio topologico X. Supponiamo di aver assegnato per ogni aperto non vuoto $U \subset X$ un $\mathcal{O}(U)-$modulo $\mathcal{M}(U)$ e per ogni inclusione $U \subset V$ un omomorfismo, detto di *restrizione*, $r_U^V : \mathcal{M}(V) \to$

$\mathcal{M}(U)$ tali che se $U \subset V \subset W$ si abbia $\bar{r}_U^V \circ \bar{r}_V^W = \bar{r}_U^W$ e $\bar{r}_U^U =$ identità; diremo allora di aver assegnato un prefascio di $\wr-$moduli.
E' chiaro poi, se $\mathcal{O}$ è un fascio di anelli, come si definisca un *fascio di $\mathcal{O}-$moduli.*

Ad esempio su una varietà differenziabile X, associando ad un aperto non vuoto U l'anello $\mathcal{O}(U)$ delle funzioni differenziabili a valori reali, si ottiene un fascio di anelli $\mathcal{O}$ che viene detto *fascio di struttura.*
Se F è un fibrato vettoriale su X , associando ad ogni aperto (non vuoto) U l'$\mathcal{O}-$modulo $\mathcal{F}(U)$ delle sezioni differenziabili di F su U si ottiene un fascio di $\mathcal{O}-$moduli che indicheremo con $\mathcal{F} = \mathcal{O}(F)$.

Un tale fascio $\mathcal{O}(F)$ è *localmente libero* nel senso che ogni $x \in X$ ha qualche intorno aperto Ω tale che sullo spazio topologico Ω il fascio indotto da $\mathcal{O}(F)$ è isomorfo alla somma diretta di un numero finito di copie del fascio di struttura.

E' facile dimostrare che in questo modo si ottiene, a meno di isomorfismi, una corrispondenza biunivoca tra $fibrativettoriali$ su X e fasci di $\mathcal{O}-$moduli localmente liberi che è in effetti una equivalenza di categorie (i morfismi tra fasci si definiscono in modo ovvio).

Da molti punti di vista i fasci sono da preferirsi sia ai moduli su un anello che ai fibrati vettoriali su uno spazio topologico. Ad esempio perché sono definiti (come i fibrati) anche in situazioni globali ove le sezioni globali possono essere poche (come ad esempio su varietà complesse compatte) e inoltre fanno parte di una famiglia abbastanza ampia di oggetti, quelli che localmente hanno una *presentazione finita*: $\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p \to F \to 0$ analogamente ai moduli localmente liberi su un anello R che sono casi particolare di *moduli di presentazione finita* ossia moduli P per cui esiste una successione esatta $R^q \to R^p \to P \to 0$.

Nella trattazione che segue comunque, utilizzeremo il linguaggio dei fasci solo per indicare possibili sviluppi degli argomenti trattati, che saranno ristretti in definitiva, essenzialmente al caso di varietà differenziabili.

Connessioni su una varietà differenziabile

Siano M una varietà differenziabile, $\mathcal{E}$ l'anello delle funzioni differenziabili su M e $T(M)$ il suo fibrato tangente. Le sezioni di $T(M)$ su X formano un modulo proiettivo finito D interpretabile come l'$\mathcal{E}-$modulo delle *derivazioni* di $\mathcal{E}$ su $\mathbb{R}$, ossia delle applicazioni $X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ verificanti per $\lambda \in \mathbb{R}$ e f , $g \in \mathcal{E}$:

- $X(f + g) = X(f) + X(g)$
- $X(fg) = X(f)g + fX(g)$
- $X(\lambda) = 0$

Si definiscono quindi $\mathcal{E}-$moduli A^p per $p \in \mathbb{N}$ considerando le applicazioni $p-$lineari alternanti da D^p a valori in $\mathcal{E}$. Esso è pensabile come il modulo delle sezioni di un fibrato vettoriale Ω^p definito in modo analogo in termini di fibrati; oppure si può considerare un collegato fascio di $\mathcal{O}-$ moduli ove $\mathcal{O}$ è il fascio delle funzioni differenziabili su M. Se E è un fibrato vettoriale su M, si considereranno le *$p-$forme a valori* in E, considerando, nel linguaggio dei moduli, le applicazioni $p-$lineari alternanti da D^p a valori in $\Gamma(E)$, oppure con analoghe definizioni in termini di fibrati o di fasci localmente liberi. Fatte queste osservazioni, tutto quel che verrà descritto nei prossimi paragrafi per un anello R sarà interpretabile su una varietà differenziabile M prendendo $R = \mathcal{E}$.

Le connessioni da un punto di vista algebrico

Ricordiamo ancora che ogni anello è supposto commutativo, dotato di identità moltiplicativa diversa da quella additiva.
I moduli sono tutti supposti *unitari* nel senso che la moltiplicazione per l'identità di R lasci invariati gli elementi del modulo. Se k è un corpo, una $k-$algebra è un anello R con una fissata inclusione $k \to R$.
Sia R un anello fissato. Una *derivazione* di R in se è una applicazione additiva $X : R \to R$ tale che per $f, g \in R$ si abbia $X(fg) = X(f)g + fX(g)$.
Tali oggetti verranno anche chiamati *campi di vettori* su R.

Le derivazioni di R in se formano un $R-$modulo $\mathcal{D}(R)$. Per X , $Y \in \mathcal{D}(R)$ gli operatori $X \circ Y$ e $Y \circ X$ sono in generale distinti. La loro differenza $X \circ Y - Y \circ X$ verrà indicata con la notazione $[X, Y]$; con un facile calcolo si trova che essa verifica le proprietà di una derivazione su R ossia che è essa stessa un campo di vettori. Quindi la 'misura' della non commutatività tra campi di vettori definisce una operazione $[\ ,\ ]$ su $\mathcal{D}(R)$. Per $X, Y, Z \in \mathcal{D}(R)$ si hanno le relazioni:

$$[X,Y] = -[Y,X] \qquad \text{(proprietà anticommutativa)}$$

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \qquad \text{(identità di Jacobi)}$$

Supporremo nel seguito di aver fissato un sottomodulo $D \subset \mathcal{D}$ che sia *involutivo* nel senso che se X , $Y \in D$ si ha anche $[X, Y] \in D$; un tale sottomodulo sarà detto un *modulo di derivazioni* su M.
Successivamente potremo aver bisogno di supporre che R sia un algebra su un corpo k e che gli elementi di D siano *definiti* su k nel senso che ognuno di essi annulli tutti gli elementi di k (ossia che gli *scalari* siano delle *costanti* per D); od anche che D sia finito e proiettivo o che sia abbastanza ampio nel senso che per ogni elemento $f \in R$ che non stia in k esiste $X \in D$ con $X(f) \neq 0$.
Tali richieste saranno fatte di volta in volta quando necessario.

Nota bene: Dato R vi sono in genere diverse scelte possibili per D; nonostante ciò sottointenderemo tale scelta parlando degli elementi di D come "le" derivazioni o campi di vettori di R.

Esempio 1: il caso di una foliazione
Sia F un sottofibrato di rango p del fibrato tangente di una varietà differenziabile Mdi dimensione n. Le sezioni di F su M costituiscono un sottomodulo proiettivo finito del modulo delle derivazioni dell'anello $\mathcal{E}$ delle funzioni differenziabili su M (che sono le sezioni del fibrato tangente), ma in generale non sarà un modulo di derivazioni per M (il commutatore di sue sezioni può non essere una sezione).

Chiameremo *integrale* di F su un aperto $U \subset M$ una applicazione differenziabile f di U in una varietà differenziabile N tale che $F_{|U}$ sia esattamente il nucleo del differenziale di f (una tale f avrà il differenziale di rango localmente costante e quindi, per un classico teorema di funzioni implicite, sarà localmente una summersione su una sottovarietà di N). Diremo che F è *localmente integrabile* su M se ogni $x \in M$ ha un intorno sul quale ha integrale. Diremo che F è *integrabile* se ha un integrale su tutto M.
Una *foliazione* di rango p su M è un sottofibrato F del fibrato tangente ad M che sia di rango p e localmente integrabile.

Se F è localmente integrabile allora le sue sezioni costituiscono un modulo di derivazioni per $\mathcal{E}$; infatti esse sono localmente caratterizzate dalla proprietà di annullare le funzioni che sono composizione di funzioni su N con f, ove $f : U \to N$ è un integrale locale.
Un teorema (Frobenius) assicura che viceversa se le sezioni di F sono un modulo di derivazioni su M, allora F è localmente integrabile, ossia è una foliazione.

Non ogni modulo di derivazioni che sia proiettivo finito è ottenuto così .
Infatti la nozione di foliazione può essere generalizzata a quella di *foliazione con singolarità* che nel caso sia integrabile su tutto M è ottenuta assegnando una applicazione differenziabile f di M in una varietà N; ad essa si associa l'insieme $D(f)$ delle derivazioni di M che annullano $h \circ f$ per ogni h differenziabile su N ed evidentemente questo è un modulo di derivazioni per M. Ad esempio sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy$; allora $D(f)$ è costituito dai campi di vettori $(a(x,y), b(x,y))$ su $\mathbb{R}^2$ tali che $y \cdot a(x,y) + x \cdot b(x,y) = 0$. Da tale relazione si ottiene che per $y = 0$ si ha $x \cdot b(x,0) = 0$ per ogni x e quindi $b(x,0) = 0$ per ogni x; ne segue che esiste $r(x,y)$ tale che $b(x,y) = y \cdot r(x,y)$; analogamente si trova una $s(x,y)$ con $a(x,y) = x \cdot s(x,y)$. La relazione $c \cdot a(x,y) + x \cdot (b(x,y) = 0$ diviene allora $xy \cdot (r(x,y) + s(x,y) = 0$ e quindi $r + s = 0$. Ciò dice che $(a,b) = r(x,-y)$ e quindi che il campo $(x,-y)$ è un generatore di $D(f)$ che è quindi è non solo proiettivo ma anche libero di rango uno.

Si noti che anche nel caso di una foliazione di rango inferiore alla dimensione della varietà può accadere che i soli elementi di $\mathcal{E}$ annullati da tutte le sezioni di F siano le funzioni costanti. Ad esempio su $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ esistono foliazioni di rango 1 aventi tale proprietà.

Esempio 2: il caso di un sottospazio
Sia ancora M una varietà differenziabile e sia $N \subset M$ una sua sottovarietà chiusa. Consideriamo l'insieme dei campi tangenti su M che nei punti di N siano tangenti ad N. Essi costituiscono evidentemente un sottomodulo $D(N)$ del modulo di tutte le derivazioni su M; che sia un modulo di derivazioni (ossia stabile per la commutazione $[\ ,\ ]$) si dimostra osservando che i suoi elementi sono caratterizzabili come quelle derivazioni che inviano l'ideale delle funzioni nulle su N in se stesso. In generale esso non sarà proiettivo: si prenda ad esempio per N l'origine in $M = \mathbb{R}^2$.

Questo modo di procedere può essere generalizzato considerando il modulo delle derivazioni che inviano un ideale I di $\mathcal{E}$ in se stesso; ad esempio l'ideale delle funzioni nulle sull'unione di un numero finito di sottovarietà trasverse tra loro; oppure una potenza dell'ideale delle funzioni nulle su una sottovarietà.

Forme differenziali
Per $p \in \mathbb{N}$ sia A^p il modulo delle applicazioni $p-$lineari alternanti da D^p ad R; i suoi elementi saranno detti $p-$*forme* su R. Se E è un $R-$modulo, indicheremo con $A^p(E)$ il modulo delle $p-$*forme* a valori in E ossia le applicazioni $p-$lineari alternanti da D^p a valori in E. Se $\circ : L \times M \to N$ è una applicazione bilineare tra $R-$moduli, definiamo prodotti $\circ : A^p(L) \times A^q(M) \to A^{p+q}(N)$ ponendo per $\alpha \in A^p(L)$, $\beta \in A^q(M)$ e $X_1, \ldots, X_{p+q} \in D$:

$$\alpha \circ \beta(X_1, .., X_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(X_{\sigma_1}, .., X_{\sigma_p}) \circ \beta(X_{\sigma_{p+1}}, .., X_{\sigma_{p+q}})$$

ove $S_{p,q}$ è l'insieme delle permutazioni σ di $\{1,\ldots,p+q\}$ tali che $\sigma(i)<\sigma(j)$ se $1\leq i<j\leq p$ o se $p+1\leq i<j\leq p+q$. In particolare $A=\oplus_{p\geq 0}A^p$ diviene un anello graduato (*anticommutativo* ossia con $\alpha\circ\beta=(-1)^{pq}\beta\circ\alpha$ e ogni $A(E)=\oplus_{p\geq 0}A^p(E)$ un $A-$modulo.

Ad esempio prendendo come $\circ$ la legge di composizione in $\mathrm{End}(L)$ si ottiene su $A(\mathrm{End}(L))$ una struttura di anello (non commutativo né anticommutativo).

Differenziazione delle forme

Definiamo un operatore $d:\mathcal{E}\rightarrow A^1$ detto *differenziale* ponendo per $f\in\mathcal{E}$ ed $X\in D$:

$$(df)(X)=X(f)$$

Si estende poi tale d ad un operatore definito su tutto A che viene chiamato *differenziazione esterna*, ponendo per $\omega\in A^p$ e $X_0,\ldots,X_p\in D$:

$$d(\omega)(X_0,..,X_p)=\sum_{0}^{p}(-1)^i X_i(\omega(X_0,..,\hat{X}_i,..,X_p))+$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,..,\hat{X}_i,..,\hat{X}_j,..,X_p)$$

Con un facile calcolo si dimostra il seguente:

Lemma 9 *Per $\alpha\in A^p$ e $\beta\in A^q$ si ha $d(\alpha\wedge\beta)=d(\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$*

Lemma 10 *Per ogni $\omega\in A$ si ha $d(d\omega)=0$ ossia $d\circ d$ è l'operatore nullo*

Dim. Sia $\omega\in A^p$ e siano $X_0,\ldots,X_{p+1}\in D$. Applicando la definizione di d si ha che $d\omega(X_0,\ldots,X_{p+1})$ è una somma di addendi di tre tipi a seconda che siano indicati due, tre o quattro salti di indici tra 1 e $p+1$. Raccogliendo tali termini insieme si dimostra la formula.

Per $p \in \mathbb{N}$, il nucleo di $d : A^p \to A^{p+1}$ verrà indicato con Z^p e detto *modulo delle forme chiuse* di grado p ; gli elementi della sua immagine B^{p+1} saranno detti *forme esatte o integrabili* di grado $p+1$; le $0-$forme esatte saranno per convenzione gli elementi del corpo k se R è una $k-$algebra; altrimenti il sottogruppo additivo generato in R dall'identità. Il lemma precedente afferma che per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha $B^p \subset Z^p$; il quoziente Z^p/B^p sarà detta la *coomologia* di R e sarà indicata con $\mathrm{H}(R)$. Nel caso che R sia una $k-$algebra la coomologia risulta essere uno spazio vettoriale su k.

Esempi
1. Se R è l'$\mathbb{R}-$algebra delle funzioni differenziabili su una varietà M e D è costituito datutte le derivazioni di R che sono costanti su $\mathbb{R}$, allora la coomologia definita è quella di de Rham usuale.
2. R come sopra ma D costituito dai campi tangenti ad una sottovarietà N. Distinguiamo due casi:
(A) Supponiamo M di dimensione n ed N di dimensione $p < n-1$. Utilizzando coordinate locali si ha $N = \mathbb{R}^n$ e $N = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^{n-p}$:
indichiamo con $x_1, \ldots, x_p$ quelle su N e con $y_1, \ldots, y_{n-p}$ quelle su $\mathbb{R}^{n-p}$. Gli elementi di D sono generati dalle $\partial_{x_i} = T_i$ per $i = 1, \ldots, p$ e dalle $y_i \partial_{y_j} = S_{ij}$ per $i, j = 1, \ldots, n-p$ Sia $\omega : D \to R$ lineare e poniamo $\omega(S_{ij}) = f_{ij}$ per $i, j = 1, \ldots, n-p$. Confrontiamo f_{ik} con f_{jk} per $i \neq j$. Essendo $y_j S_{ik} = y_i S_{jk}$ ed essendo ω lineare si ha ottiene $y_j f_{ik} = y_i f_{jk}$; ciò comporta che ogni f_{ik} è divisibile per y_i ed in definitiva che esiste $f_k \in R$ tale che $f_{ik} = y_+ i f_k$ per ogni $i = 1, \ldots, n-p$. Da ciò si ottiene che ω è estendibile ad un omomorfismo lineare su tutti i campi di vettori, ossia che essa è la restrizione di una vera forma su M; in definitiva quindi la restrizione induce un isomorfismo tra $1-$forme su M e $1-$forme definite col modulo di derivazioni fissato. In modo analogo si dimostra che ciò vale anche per le $p-$forme con p qualsiasi.

(B) Sia ora $\dim(N) = \dim(M) - 1$. Usando carte locali si esamina il caso $N = \mathbb{R}^n$ con coordinate $x_1, \ldots, x_n$ ed $M = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ con una ulteriore coordinata t. Il modulo D ha allora per base i campi $t\partial_t = T$ e $\partial_{x_i} = S_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Per $f \in R$ si ha $df = T(f)dt + S_1(f)\omega_1 + \ldots + S_n(f)\omega_n$. Le $1-$forme $dx_1, \ldots, dx_n$ sono le duali di $S_1, \ldots, S_n$ mentre dt è t volte la duale τ di T, potremmo quindi scrivere $\tau = dt/t$.

Sia ora ω una forma chiusa relativa al modulo di derivazioni D. Possiamo scrivere $\omega = \tau \wedge \alpha + \beta$ ove α e β non contengono τ. Possiamo poi scrivere $\alpha = \alpha_0 + t\alpha_1$ ove α_0 non dipende da t. Si noti adesso che la parte di $d\beta$ che contiene τ è divisibile pet t (perché è ottenuta applicando T) e quindi si annulla per $t = 0$; ne segue che α_0 , che è una forma in cui non compaiono né t né τ, è una forma chiusa.

Allora $\omega - \tau \wedge \alpha_0$ è una forma chiusa esprimibile in dt e $dx_1, \ldots, dx_n$ ed è quindi esatta su $\mathbb{R}^{n+1}$. In altre parole ω è coomologa alla forma $\tau \wedge \alpha_0$. Se $p > 1$ allora $\alpha_0 = d\theta$ per qualche $(p-1)-$forma θ su $\mathbb{R}^n$ e si ha $\tau \wedge \alpha_0 = d(\tau \wedge \theta)$ quindi si ha $\mathrm{H}(D) = (0)$ per $p > 1$. Per $p = 1$ si ottiene $\mathrm{H}^1(D) = \mathbb{R}$ e come al solito $\mathrm{H}^0(D) = \mathbb{R}$.

Esercizi
1. Si consideri il caso precedente con M varietà qualsiasi.
2. Si prenda per D l'insieme dei campi di vettori su M tangenti di ordine r

ad una sottovarietà N (ossia che applicano funzioni nulle su N in funzioni nulle d'ordine r su N.

3. Esaminiamo un esempio di foliazione.
Sia $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; il suo fibrato tangente è banalizzato da $X = \partial_x$ e $Y = \partial_y$. Sia F il suo sottofibrato generato da $T = aX + bY$ con $(a,b) \neq 0$ e sia D il modulo di derivazioni delle sezioni di F (ossia l'$\mathcal{E}-$modulo dei multipli di T). Se a, b sono linearmente dipendenti su $\mathbb{Q}$, la foliazione è banale, ossia è quella associata ad una rappresentazione di M come fibrato su S^1 a fibra S^1; tale fibrato è inoltre un prodotto per cui le forme differenziali e coomologia sono quelle di S^1 tensorizzate per l'anello delle funzioni differenziabili su S^1.

Se a, b sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, gli elementi di $\mathcal{E}$ che hanno differenziale nullo (per D) sono solo le funzioni costanti. Quindi $\mathrm{H}^0(D) \simeq \mathbb{R}$. Essendo F di rango uno si ha $A^p = (0)$ per $p > 1$ ed A^1 è generato da T ed è quindi libero di rango uno. Calcolare $\mathrm{H}^1(D)$ equivale quindi a determinare l'immagine di $d : R \to R$.
Vediamo quali $1-$forme sono integrabili. Sia $\omega \in A^1$ e sia $g = \omega(T) \in R$.
Per $f \in R$ si ha $df = \omega$ se e solo se $df(T) = \omega(T)$ ossia $af_x + bf_y = g$.

Per $h \in \mathbb{R}$ sia γ_h la porzione della retta parallela ad (a,b) e passante per $(h,0)$ che è compresa tra $y = 0$ ed $y = 1$ ed orientiamo γ_a a partire da $(h,0)$.

Per il teorema di Torricelli $f(h + b/a, 0) - f(h,0) = \int_{\gamma_h} df$; d'altra parte parametrizzando γ_h con $[0,1] \ni y \to (h + (a/b)\cdot y, y)$ si ha :

$$\int_{\gamma_h} df = 1/b \int_0^1 g(h + (a/b)\cdot y, y)dy = \psi(h)$$

Quindi ψ e $\phi(x) = g(x,0)$ sono due funzioni su $\mathbb{R}$ di periodo uno che verificano la relazione:

$$\phi(x + (a/b)) - \psi(x) = \phi(x)$$

Integrando tra 0 e 1 se ne deduce $\int_0^1 \phi(x)dx = 0$ e quindi

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dx \wedge dy = 0$$

Ne segue che $\mathrm{H}^1(D) \neq 0$. Per mostrare che esso è isomorfo ad $\mathbb{R}$ procediamo così : data $\omega \in A^1$ e posto come sopra $g = \omega(T)$ si consideri una funzione F su $\mathbb{R}^2$ tale che $T(F) = g$ (pensata come funzione periodica su $\mathbb{R}^2$) e si ponga $\phi(x) = F(x + (a/b), 1) - F(x, 0)$. Evidentemente ϕ è periodica di periodo uno su $\mathbb{R}$; se esiste ψ periodica su $\mathbb{R}$ e tale che $\psi(x + (a/b)) - \psi(x) = \phi(x)$ la funzione $\bar{F}(x,y) = F(x,y) - f(x)$ sarà periodica e fornirà una primitiva di ω.
Il problema è quindi il seguente: data una funzione ϕ di periodo uno su $\mathbb{R}$, trovare una ψ ancora periodica e tale che $\psi(x + (a/b)) - \psi(x) = \phi(x)$.

In notazione complessa, sviluppiamo in serie di Fourier:

$$\phi(t) = \sum_n a_n e^{2\pi int} \qquad \text{e} \qquad \psi(t) = \sum_n b_n e^{2\pi int}$$

Posto $a/b = t_0$ si vuole che:

$$\sum_n b_n e^{2\pi in(t+t_0)} - \sum_n b_n e^{2\pi int} = \sum_n a_n e^{2\pi int}$$

e quindi $b_n(e^{2\pi i n t_0}-1)=a_n$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$. Per $n=0$ ciò dà $a_0=0$ cioè $\int_0^1\phi(t)=0$ che è la condizione necessaria trovata avanti. Per $n\neq 0$ si ha sicuramente soluzione se $e^{2\pi i n t_0}\neq 1$ il che accade se $t_0\notin\mathbb{Q}$ ossia se a e b sono linearmente indipendanti su $\mathbb{Q}$.

Quindi $\mathrm{H}^1(D)\simeq\mathbb{R}$.

Connessioni

Una *connessione su un R-modulo* L è un operatore $\nabla: L\to A^1(L)$ che sia additivo e tale che per $f\in R$ ed $\alpha\in L$ si abbia :

$$\nabla(f\cdot\alpha)=df\circ\alpha+f\cdot\nabla\alpha$$

ove il prodotto $df\circ\alpha$ è quello definito sopra tra A e $A(L)$. Si noti che se R è una $k-$algebra, allora gli elementi di k sono annullati (per definizione) dagli $X\in D$, quindi hanno differenziale nullo e quindi ∇ risulta essere $k-\mathit{lineare}$.

Una connessione su L determina per ogni $X\in D$ un operatore $\nabla_X: L\to L$ definito ponendo per $s\in L$:

$$\nabla_X(s)=\nabla s(X)$$

Tali operatori sono additivi e verificano per $f\in R$ ed $s\in L$ la relazione:

$$\nabla_X(fs)=X(f)s+\nabla_X(s)$$

Inoltre essi dipendono linearmente (su R) da $X\in D$.

D'altra parte è chiaro che assegnando siffatti operatori che verifichino le relazioni dette, rimane individuata una ed una sola connessione su L.

Siano $\nabla_1,\ldots,\nabla_r$ connessioni su L e $\phi_1,\ldots,\phi_r\in R$; l'applicazione $\nabla=\sum_1^r\phi_i\nabla_i$ è una connessione se $\sum_1^r\phi_i=1$; a parte casi degeneri (se per ogni $X\in D$, $f\in R$ e $\omega\in L$ si ha $X(f)\omega=0$) tale condizione è anche necessaria.

Quindi le connessioni di L non costituiscono un modulo su R ma l'analogo, nel caso di spazi vettoriali invece che di moduli, di uno spazio affine; ossia non vi è un punto (origine) privilegiato. Il modulo associato allo spazio delle connessioni (ossia le differenze tra connessioni), è l'$R-$modulo $A^1(\mathrm{End}(L))$ delle $1-$forme a valori negli endomorfismi di L. Insomma se ∇ è una connessione su L ogni altra connessione ∇' su L è del tipo:

$$\nabla'(s)=\nabla(s)+\omega\cdot s$$

ove $\omega\in A^1(\mathrm{End}(L))$ è univocamente determinata da tale eguaglianza.

Costruzione di connessioni

Sia L un modulo ed L^*=Hom(L,R) il suo duale. L'applicazione bilineare $b: L^*\times L\to$End(L) definita per $\sigma\in L^*$, $s,t\in L$ da:

$$b(\sigma,s)(t)=\sigma(s)t$$

definisce un omomorfismo naturale $L^*\otimes L\to$End(L).

Supponiamo che l'endomorfismo identità id_L su L sia nell'immagine di tale applicazione (ciò accade ad esempio se L è proiettivo finito) ; in altre parole supponiamo esistano $\sigma_1, ..., \sigma_r \in L^*$ ed $s_1, ..., s_r \in L$ tali che per ogni $s \in L$ si abbia :

$$s = \sum_1^r \sigma_i(s) \cdot s_i$$

Per ogni tale rappresentazione di id_L si definisce una connessione ∇ su L ponendo per $s \in L$:

$$\nabla s = \sum_1^r d\sigma_i(s) \cdot s_i$$

Un altro modo di introdurre una connessione su un modulo L è la seguente. Supponiamo che L sia un fattore diretto di un modulo M sul quale è data una connessione ∇_M; si ottiene una connessione su L utilizzando una proiezione $\pi : M \to L$ data dalla scelta di un supplementare; infatti tale proiezione si estende ad una proiezione $\pi : A(M) \to A(L)$ e si può porre per $s \in L$:

$$\nabla_L(s) = \pi \nabla_M(s)$$

Entrambi i metodi descritti permettono di introdurre connessioni su un modulo proiettivo finito L.

Problema Ogni connessione su un modulo proiettivo finito è ottenibile con i metodi sopra descritti?

Descriviamo un terzo modo di introdurre una connessione su L nel caso di varietà differenzibili; un analogo, nel caso astratto dei moduli su un anello di cui ora stiamo discutendo, sarà descritto più avanti perché richiede di aver sviluppato prima un pò del linguaggio degli schemi.

Siano quindi $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di una varietà , $(\phi_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinato e per $i \in I$ sia data una connessione ∇_i sull'aperto U_i. Allora $\sum_{i \in I} \nabla_i$ definisce una connessione globale sulla varietà.

Vediamo ora come delle connessioni su dei moduli, possano indurre delle connessioni in moduli costruiti in modo canonico da essi.

Connessione sul duale Sia ∇ una connessione su L ed indichiamo con $< \, , \, >: L^* \times L \to R$ l'accoppiamento di dualità. Chiameremo *duale* di ∇ una connessione ∇^* su L^* se verifica per $\sigma \in L^*$ ed $s \in L$ la formula:

$$d < \sigma, s > = < \nabla^* \sigma, s > + < \sigma, \nabla s >$$

ove al solito $< \, , \, >$ è estesa ad una applicazione bilineare $A(L^*) \times A(L) \to A$.

Siano $\sigma \in L^*$ ed $X \in D$; consideriamo l'applicazione $\nabla^*_X(\sigma) : L \to R$ definita per $s \in L$ da :

$$\nabla^*_X(\sigma)(s) = X < \sigma, s > - < \sigma, \nabla_X(s) >$$

Essa è $R-$lineare in s e rappresenta quindi un elemento di L^*. Si ha così per ogni $X \in D$ un operatore $\nabla *_X$ che, come si verifica con un facile calcolo, soddisfa le proprietà caratteristiche di una connessione.

Connessione sul modulo degli endomorfismi Sia $h : L \to L$ un endomorfismo. Esso determina un endomorfismo, ancora indicato h , di tutto $A(L)$ ottenuto definendo per $\omega \in A^p(L)$ ed $X_1, ..., X_p \in D$:

$$(h(\omega))(X_1, ..., X_p) = h(\omega(X_1, ..., X_p))$$

Sia ora ∇ una connessione su L ; per $h \in$End(L) l'operatore:

$$(\nabla \circ h - h \circ \nabla) : L \to A^1(L)$$

è $R-$lineare e determina quindi un elemento $\nabla\, 'h \in$Hom$(L, A^1(L)) \simeq A^1($End(L). Si verifica direttamente che questa è una connessione su End(L) e che essa veri fica la relazione per $h \in$End(L) ed $s \in L$:

$$\nabla(h(s)) = (\nabla\, 'h)s + h(\nabla s)$$

Altre connessioni indotte saranno descritte quando necessario.

Differenziazione covariante

Se $\nabla : L = A^0(L) \to A^1(L)$ è una connessione, si definiscono operatori

$$\nabla : A^p(L) \to A^{p+1}(L)$$

per $p \in \mathbb{N}$, ponendo per $\omega \in A^p(L)$ e $X_1, \ldots, X_p \in D$:

$$(\nabla\omega)(X_1, .., X_p) = \sum_0^p (-1)^i \nabla_{X_i} \omega(X_0, .., \hat{X}_i, .., X_p) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, .., \hat{X}_i, .., \hat{X}_j, .., X_p)$$

Essi vengono chiamati (operatori di) *differenziazione covariante.* Rispetto al prodotto per le forme, essi verificano per $\alpha \in A^p$ e $\beta \in A^q(L)$:

$$\nabla(\alpha \circ \beta) = d(\alpha) \circ \beta + (-1)^p \alpha \circ \nabla(\beta)$$

Questo modo di procedere è la copia di quello seguito per definire la differenziazione esterna sulle forme ordinarie a partire dalla differenziazione
$d : R \to A^1(R) = A^1$ (la "differenziazione di funzioni"). In quel caso abbiamo verificato che $d \circ d = 0$ il che ci ha permesso di definire la coomologia delle forme. Ci chiediamo adesso se ciò vale anche per una connessione ∇ su un modulo L. La prima verifica da fare è $\nabla^2 : L \to A^2(L)$. Come vedremo esso è in generale non nullo e dà una "misura" di quanto la connessione non sia "banale"; sarà detto la *curvatura* di ∇ e sarà indicato con $\mathfrak{R}_\nabla = \mathfrak{R}$.
Dalla definizione di differenziazione esterna si ha per $X, Y \in D$:

$$\mathfrak{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Con un semplice calcolo diretto si dimostra il seguente:

Proposizione 11 *Per ogni $X, Y \in D$ l'applicazione $\mathfrak{R}(X,Y) : L \to A^2(L)$ è lineare. Di conseguenza $\mathfrak{R}$ induce un elemento di $A^2(End(L))$.*

Si ricordi che ogni prodotto (ossia "applicazione") bilinare tra moduli si estende ad un prodotto tra le forme a valori in tali moduli. In particolare, considerando il prodotto canonico $\mathrm{End}(L) \times L \to L$, la curvatura dà applicazioni lineari:

$$A^p(L) \ni \omega \mapsto \mathfrak{R}(\omega) \in A^{p+2}(L)$$

Proposizione 12 *Per ogni $\omega \in A^p(L)$ si ha $\mathfrak{R}(\omega) = \nabla\ ^2(\omega)$.*
In altri termini $\mathfrak{R}$ dà in ogni grado l'Hessiano delle una forme a valori in L che perciò è una applicazione lineare.

Dim. Per $p = 0$ l'asserto la formula è la definizione di $\mathfrak{R}$.
Sia $\omega = \alpha \cdot s$ con $\alpha \in A^p$ ed $s \in L$ (il prodotto tra α e s è quello indotto dal prodotto degli elementi di R (gli scalari) per gli elementi di L. Si ha allora:

$$\nabla(\nabla\alpha \cdot s) = \nabla\big(d\alpha \cdot s + (-1)^p\alpha \cdot \nabla(s)\big) = d^2(\alpha) \cdot s + (-1)^{p+1} d\alpha \cdot \nabla(s) +$$

$$+(-1)^p d\alpha \cdot \nabla(s) + (-1)^{p(p+1)}\alpha \cdot \nabla\ ^2(s) = \alpha \cdot \mathfrak{R}(s) = \mathfrak{R}(\alpha \cdot s)$$

Quindi la formula è verificata da tutti gli elementi di $A^p(L)$ del tipo $\alpha \cdot s$;
se L è proiettivo finito tali forme costituiscono un sistema di generatori cosicché la formula è in tal caso dimostrata. Nel caso generale la dimostrazione si fa con un calcolo analogo a quello che si deve fare per mostrare che la differenziazione ordinaria verifica $d \circ d = 0$.

Proposizione 13 (Identità di Bianchi) *Sia $\nabla\ '$ la connessione indotta su $End(L)$ da una connessione ∇ sul modulo L. Allora $\nabla\ '(\mathfrak{R}) = 0$*

Dim. $\nabla\ '\mathfrak{R} \in A^3(\mathrm{End}(L))$; per $s \in L$ si ha: $(\nabla\mathfrak{R})(s) = \nabla(\mathfrak{R}(s)) - \mathfrak{R}(\nabla(s))$ e per la proposizione precedente $\nabla(\mathfrak{R}(s)) = \nabla\ ^3(s) = \mathfrak{R}(\nabla(s))$.

Proposizione 14 *Sia ∇ una connessione su L e sia $\Psi \in A^1(End(L))$ determinante un'altra connessione $\nabla' = \nabla + \Psi$. Le curvature di ∇ e $\nabla\ '$ sono legate dalla relazione:*

$$\mathfrak{R}\ ' = \mathfrak{R} + \nabla\Psi + \Psi \circ \Psi$$

Sia fissata una connessione ∇ su un $R-$modulo L. La sua curvatura $\mathfrak{R}$ è un elemento di $A^2(\mathrm{End}(L))$. Se L è libero, scelto un isomorfismo $L \simeq R^n$, essa è sostanzialmente una matrice quadrata d'ordine n a coefficienti $2-$forme di R e scriveremo quindi $\mathfrak{R} = (\omega_{ij})_{i,j=1,..,n}$. Cambiando banalizzazione di L (che sarà ottenuta trasformando R^n con una matrice quadrata G a coefficienti in R che sia invertibile, ossia avente per determinante un elemento invertibile di R), tale matrice cambierà (in un modo calcolabile a partire dalla matrice G); siamo interessati a studiare oggetti calcolabili a partire dalla matrice (ω_{ij}) che non dipendano dalla particolare banalizzazione utilizzata; essi saranno perciò

chiamati *invarianti* o *caratteristici* della connessione. Saremo poi interessati a vedere quanto questi dipendano dalla particolare connessione scelta e troveremo così degli invarianti o elementi caratteristici del modulo L. Il metodo principale per costruire invarianti di matrici (in questo caso matrici di "forme" o più precisamente "forme di matrici" perché elementi di moduli del tipo $A^p(\text{End}(L))$) è quello di considerare i coefficienti del "polinomio caratteristico" che in definitiva è basto sulla nozione di determinante.
Svilupperemo ora questo programma estendendo queste nozioni non solo a moduli liberi finiti su un anello R ma anche a moduli proiettivi finiti su esso.

Il polinomio caratteristico di un endomorfismo

Nel seguito supporremo che R sia un anello commutativo. Ad ogni modulo su R sarà associato per prodotto tensoriale, un modulo sull'anello dei polinomi $R[\lambda]$ che sarà comunque indicato con lo stesso simbolo.
Sia ϕ un endomorfismo di un $R-$modulo libero finito L. Fissando un isomorfismo $L \simeq R^n$, tale ϕ è espresso da una matrice quadrata A a coefficienti in R; il *polinomio caratteristico* di ϕ è per definizione :

$$P(\phi;\lambda) = det(A + \lambda I) = \lambda^n + P_1(A)\lambda^{n-1} + \ldots + P_n(A)$$

ove $P^r(A) = \sum_{\sharp J=r} det(A_J)$ avendo indicato per $J \subset \{1,\ldots,n\}$ con A_J il minore di A degli elementi aventi indici in J.

Esso non dipende dalla particolare identificazione fatta di L con R^n come conseguenza del fatto che per A, B matrici quadrate dello stesso ordine si ha $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

Sia ora ϕ un endomorfismo di un modulo proiettivo finito L. Scelto un supplementare M di L , ossia un isomorfismo $L \oplus MK \simeq R^n$ definiamo il *polinomio caratteristico* di ϕ nel seguente modo:

$$P(\phi;\lambda) = det \begin{pmatrix} \phi + \lambda I_L & 0 \\ 0 & I_M \end{pmatrix}$$

Mostreremo adesso che tale polinomio non dipende dal supplementare scelto ma solo dall'endomorfismo ϕ. Ed infatti aggiungendo ad M un $R^{n'}$, si ha la matrice:

$$\begin{pmatrix} \phi + \lambda I_L & 0 & 0 \\ 0 & I_M & 0 \\ 0 & 0 & I_{R^{n'}} \end{pmatrix}$$

che ha lo stesso determinante della precedente.

D'altra parte se $L \oplus M \simeq R^m$ e $L \oplus M' \oplus R^{n'}$ si ha:

$$(\phi + \lambda I_L, I_M, I_L, I_{M'}) = (\phi + \lambda I_L, I_{R^n} \oplus I_{M'}) = (\phi + \lambda I_L, I_{r^{n'}} \oplus I_M)$$

Si noti anche che $P(I_{R^n};\lambda) = (\lambda+1)^n$. Ne segue che se $L \oplus M \simeq R^n$ si ha:

$$P(I_L;\lambda) \cdot P(I_M;\lambda) = (\lambda+1)^n$$

Sembrerebbe quindi che debba essere $P(I_L;\lambda) = (\lambda+1)^p$ e $P(I_M;\lambda) = (\lambda+1)^q$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}$ con $p + q = n$; se ciò accade diremo che L (risp. M) è *equidimensionale* e chiameremo p (risp. q) il suo *rango*. Ma ciò non

accade in generale come mostra l'esempio di un fibrato avente ranghi diversi su diverse componenti di una varietà sconnessa. Comunque si può dimostrare che che se l'anello R è connesso secondo la definizione che segue, ogni $R-$modulo proiettivo finito è equidimensionale e quindi ha un rango ben definito.
Definizione: un anello R è detto *connesso* se gli unici suoi elementi x tali che $x(1-x)=0$ sono $x=0$ ed $x=1$.

D'ora in poi ogni modulo proiettivo finito sarà supposto equidimensionale, o meglio l'anello R sarà supposto connesso. Da tutto ciò si deduce la seguente:

Proposizione 15 *Il polinomio caratteristico $P(\phi;\lambda)$ di un endomorfismo ϕ di un modulo proiettivo L avente rango p è un polinomio monico di grado p*

Dim. Sia M un supplementare di L e si considerino su $L\oplus M\simeq R^n$ gli endomorfismi $\sigma=(\phi+\lambda I_L, I_M)$ e $\tau=(I_L,\lambda I_M)$. I loro determinanti sono rispettivamente $P(\phi;\lambda)$ e $(\lambda+1)^q$ ove q è il rango di M ed il determinante del loro prodotto essendo il polinomio caratteristico di un endomorfismo di R^n deve essere monico di grado n.

Il coefficiente $P^i(\phi)$ del termine di grado i in $P(\phi;\lambda)$ è detto $i-$esimo *elemento caratteristico* di ϕ; in particolare P^1 è detto la *traccia* e sarà indicata con $Tr(\phi)$ e P^p il *determinante* di ϕ e sarà indicato con $det(\phi)$

Proposizione 16 *Siano ϕ e ψ endomorfismi di L ; si ha:*

$$det(\phi\circ\psi)=det(\phi)\cdot det(\psi)$$

$$Tr(\phi+\psi)=Tr(\phi)+Tr(\psi)\quad e\quad Tr(\phi\circ\psi)=Tr(\psi\circ\psi)$$

Per $i=1,\ldots,p$, il coefficiente $i-$esimo del polinomio caratteristico è una applicazione di $\mathrm{End}(L)$ *in R omogenea di grado i. In particolara quindi la traccia è unomomorfismo di $R-$moduli.*
Infine ϕ è un isomorfismo se e solo se $det(\phi)$ è invertibile in R

Dim. Dalla definizione $det(\phi)$ è il valore del polinomio caratteristico per $\lambda=0$ e quindi è il determinante della matrice dell'endomorfismo (ϕ,I_M) di $R^n=L\oplus M$; la prima formula segue allora dell'analoga per matrici quadrate.
Si osservi poi che l'endomorfismo $(\phi+\lambda I_L,\lambda I_M)$ di $L\oplus M$ è la composizione degli endomorfismi $(\phi+\lambda I_L,I_M)$ e $(I_L,\lambda I_M)$ e quindi che $P(\phi;\lambda)\cdot\lambda^p=P((\phi,0);\lambda)$. Ne segue che $Tr(\phi)=Tr((\phi,0))$; le formule relative alle tracce di endomorfismi di L seguono quindi dalle analoghe per matrici quadrate.

Sia ora x un'altra indeterminata su R ed operiamo con coefficienti nell'anello delle funzioni razionali fratte in x a coefficienti nell'anello $R[\lambda]$. Si ha allora :

$$P(x\phi;\lambda)=det(x\cdot(\phi+(\lambda/x)I_l))=x^p\cdot P(\phi;\lambda/x)$$

Confrontando i coefficienti dei termini di egual grado si ottiene l'omogeneità dichiarata nell'enunciato.
Per dimostrare l'ultima asserzione si osserva che ϕ è un isomorfismo su L se e solo se (ϕ,I_M) lo è su R^n e si utilizza l'analoga asserzione per matrici quadrate.

Ricordiamo che ogni omomorfismo di moduli $u:M\to N$ induce in modo ovvio degli omomorfismi $A^p(M)\to A^p(N)$ che indicheremo ancora con u. In particolare da Tr :$\mathrm{End}(L)\to R$ si deducono applicazioni lineari $Tr:A^p(\mathrm{End}(L))\to A^p$

Proposizione 17 *Per* $\alpha \in A^p(\mathrm{End}(L))$ *e* $\beta \in A^q(\mathrm{End}(L))$ *si ha:*

$$Tr(\alpha \circ \beta) = (-1)^{pq} Tr(\beta \circ \alpha)$$

Dim. Siano $X_1, \dots, X_{p+q} \in D$. Si ha:

$$(\alpha \circ \beta)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}) \circ \beta(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})$$

$$(\beta \circ \alpha)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\tau \in S_{q,p}} (-1)^{|\tau|} \beta(X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_q}) \circ \ \alpha(X_{\tau_{q+1}}, \dots, X_{\tau_{p+q}})$$

Si applichi Tr a tali eguaglianze ricordandone le proprietà già stabilite e notando che si passa dalle σ alle τ con pq scambi.

Polinomi simmetrici
Siano $X_1, \dots, X_n$ indeterminate su un anello R; un polinomio $F \in R[X_1, \dots, X_n]$ è detto *simmetrico* se per ogni permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ si ha:

$$F(X_1, \dots, X_n) = F(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_n})$$

Supponiamo $R = Z$ e sia T un'altra indeterminata su esso. L'eguaglianza :

$$\prod_1^n (T + X_i) = c_0 T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n$$

definisce dei polinomi $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ che vengono detti *funzioni simmetriche elementari* in $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$.
Si ha $c_0 = 1$, $c_1 = X_1 + \dots + X_n$, ... , $c_n = X_1 \cdot .. \cdot X_n$ e quindi si tratta di polinomi omogenei di gradi $0, \dots, n$. Un teorema di algebra ("classica") asserisce che ogni polinomio $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ che sia invariante, è una funzione polinomiale, univocamente determinata, di $c_0, \dots, c_n$. In altri termini si dimostra che dette $Y_1, \dots, Y_n$ altre indeterminate su $\mathbb{Z}$, l'omomorfismo:

$$\mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n] \to \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

ottenuto applicando Y_i in c_i per $i = 1, \dots, n$, è un isomorfismo tra l'anello $\mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n]$ e il sottoanello di $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ costituito dai polinomi simmetrici.

Ad esempio, consideriamo per $r \in \mathbb{N}$ il polinomio:

$$s_r(X_1, \dots, X_n) = X_1^r + \dots + X_n^r$$

Evidentemente esso è simmetrico, quindi deve essere esprimibile in termini dei $c_1, \dots, c_n$. Per esprimere tale dipendenza si possono utilizzare le seguenti formule ove per convenzione per $h > n$ si è indicato con c_h il polinomio nullo; per ogni intero positivo r si ha la formula (Newton):

$$c_0 s_r - c_1 s_{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} c_{r-1} s_1 + (-1)^r r c_r s_0$$

Ricordando che $c_0 = 1$ queste mostrano, come predetto dal teorema di algebra sopra ricordato, che le s_h sono esprimibili come funzioni polinomiali a

coefficienti interi nelle c_k.
Le considerazioni ora svolte nel caso dell'anello $R = \mathbb{Z}$ costituiscono solo parzialmente un caso particolare perché $\mathbb{Z}$ è in qualche modo un anello *universale*. Consideriamo infatti polinomi a coefficienti in un anello commutativo comunque fissato R. L'omomorfismo (l'unico unitario) di $\mathbb{Z}$ in A trasforma gli s_h e c_k in polinomi simmetrici sull'anello R e questi verificano le formule di *Newton* e le loro conseguenze come ad esempio il fatto che le s_h siano funzioni polinomiali delle c_k. Si noti poi che le formule di Newton permettono anche di esprimere le c_k come funzioni polinomiali delle s_h se si opera con coefficienti razionali,
ma che tali funzioni polinomiali, anche se $s_0 = 1$, hanno parte dei coefficienti razionali e non interi. Questo fatto impedisce di dedurne una analoga esprimibilità per coefficienti in un anello qualsiasi che di fatto poi in generale non sussiste (si consideri ad esempio il caso in cui R è un corpo di caratteristica due: l'anello dei polinomi generato dalle s_h è l'anello generato dalla sola s_1 ed è strettamente più piccolo di quello generato dalle c_k). Comunque dal fatto che tale esprimibilità sussiste a coefficienti in $\mathbb{Q}$, si deduce che essa è possibile su ogni anello in cui l'omomorfismo $\mathbb{Z} \to R$ si estende a tutto $\mathbb{Q}$.

Invarianti di matrici

Sia L un modulo proiettivo finito di rango p su un anello R e indichiamo con $\mathcal{M}$ il modulo dei suoi endomorfismi. Una funzione $f : \mathcal{M} \to R$ è chiamata *(un) invariante* se per ogni $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$ si ha $f(\sigma \circ \tau) = f(\tau \circ \sigma)$.
In particolare se f è un invariante, σ e τ sono endomorfismi di L e τ è un isomorfismo si avrà $f(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}) = f(\sigma)$.
Sia T una indeterminata su R e poniamo per $\sigma \in \mathcal{M}$:

$$det(\sigma + T \cdot I_L) = \sum_0^p C^h(\sigma) \cdot T^{p-h}$$

ossia sia $C^h(\sigma)$ l'$h-$esimo coefficiente del polinomio caratteristico di σ.
Indichiamo inoltre per r intero la traccia di σ^r con $S^r(\sigma)$. Evidentemente tali C ed S sono delle funzioni da $\mathcal{M}$ a R. Per semplificare le notazioni conveniamo che C^r indichi l'applicazione nulla per $r > p$. Si ha la seguente:

Proposizione 18 *Le funzioni C^r e S^r sono invarianti . Per di più esse verificano le formule di Newton. Di conseguenza le S sono funzioni polinomiali (a coefficienti in R) delle C. Se poi R contiene $\mathbb{Q}$ allora anche le C sono esprimibili come polinomi nelle S*

Dim. Esaminiamo dapprima il caso che L sia libero finito. Sia σ un endomorfismo di L associato ad una matrice quadrata$A$ di ordine p e sia $\wedge^r\sigma$ l'endomorfismo di $\wedge^r R^n$ indotto da σ; verifichiamo che $P^r(\sigma) = Tr(\wedge^r\sigma)$. Sia infatti $e_1, \ldots, e_p$ una base di L; allora una base di $\wedge^r L$ è data dagli $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ per $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq p$. Siccome

$$\sigma(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}) = \sigma(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \sigma(e_{i_r})$$

nella scrittura di tale elemento in termini delle base scelta, il coefficiente relativo a $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ è il determinante della matrice A_I costituita dagli elementi della matrice A aventi coefficienti in $\{i_1, \ldots i_r\}$. Quanto asserito segue quindi dal fatto che $C^r(\sigma) = P^r(A) = \sum_{\sharp I=r} det(A_I)$. Se τ è un altro endomorfismo di $L = R^p$ si ha così l'eguaglianza $P^r(\sigma \circ \tau) = P^r(\tau \circ \sigma)$ come conseguenza del fatto che l'operatore di traccia è invariante (sugli endomorfrismi di $\wedge^r L$) e della formula:

$$\wedge^r(\sigma \circ \tau) = \wedge^r(\sigma) \circ \wedge^r(\tau)$$

Nel caso generale che si abbia un modulo proiettivo finito L di rango p , si scelga un supplementare M che abbia rango diciamo q. Quindi $L \oplus M \simeq R^{p+q}$. Come si è già visto precedentemente, per $\sigma \in$End(L) , si ha:

$$P(\sigma \oplus 0; \lambda) = \lambda^q P(\sigma; \lambda)$$

e quindi $P^r(\sigma; \lambda) = P^{r+q}(\sigma \oplus 0; \lambda)$ per ogni r.
L'invarianza delle S^r si dimostra semplicemente applicando più volte la formula $Tr(\sigma \circ \tau) = Tr(\tau \circ \sigma)$ sino a trasformare $Tr((\sigma \circ \tau)^r)$ in $Tr((\tau \circ \sigma)^r)$.
Per quanto riguarda le formule di Newton, con ragionamenti analoghi a quelli usati sopra ci si riduce al caso in cui L sia il modulo libero R^p , ossia al caso di matrici quadrate d'ordine p. In questo caso la formula verrà controllata in più passi.
passo 1 : le formule sono verificate se A è una matrice triangolare. Infatti in tal caso, se $x_1, \ldots, x_p$ sono gli elementi sulla diagonale di A, le C^h e le S^k divengono rispettivamente i polinomi simmetrici c^h e s^k nelle $x_1, \ldots, x_p$ per i quali le formule sono valide. Siccome poi le C^h e le S^k sono invarianti le formule sono valide per tutte le matrici triangolabili.
passo 2 : le formule sono valide se R è un corpo algebricamente chiuso. Infatti in tal caso ogni matrice è triangolabile.
passo 3 : le formule sono valide se R è un dominio di integrità. Infatti in tal caso le matrici a coefficienti in A sono parte delle matrici a coefficienti in una chiusura algebrica del corpo dei quozienti di R.
ultimo passo : Consideriamo l'anello R_0 costituito dai polinomi nelle indeterminate A_{ij} per $i, j = 1, \ldots p$ ed aventi i coefficienti in $\mathbb{Z}$. Se A è la matrice costituita dalle indeterminate A_{ij} , essa verifica le formule di Newton perché R_0 è un dominio di integrità. Sia allora $\bar{A}$ una matrice (quadrata d'ordine p) a coefficienti in un anello commutativo R qualsiasi. L'omomorfismo di R_0 in R che porta l'indeterminata A_{ij} nell'elemento che occupa il posto di indici ij nella matrice $\bar{A}$, trasforma gli invarianti C^h e S^k della matrice A negli analoghi della matrice $\bar{A}$ e quindi le relazioni di Newton tra questi ultimi sono conseguenza delle analoghe tra i precedenti.

Nota : Le considerazioni appena svolte mostrano l'importanza di cercare, quando possibile, di formulare i risultati di algebra sull'anello degli interi; spesso questo caso è infatti quello "universale". Ad esempio anche la proposizione che segue si può dimostrare con considerazioni anaoghe.

Proposizione 19 (Hamilton) *L'opposto di un endomorfismo σ di un modulo proiettivo finito L soddisfa il proprio polinomio caratteristico. Precisamente si ha:*

$$(-1)^p \sigma^p + (-1)^{p-1} P^1(\sigma) \sigma^{p-1} + \ldots + P^p(\sigma) \equiv 0$$

Forme e classi caratteristiche

Siano L un modulo proiettivo finito e ∇ una connessione su esso. per $r \in \mathbb{N}$ definiamo $\omega_r(\nabla) = Tr(\mathfrak{R}^r)$ ove $\mathfrak{R}$ è la curvatura di ∇.

Lemma 20 $\omega_r(\nabla) \in A^{2r}$ *è una forma chiusa*

Dim. Per $r = 0$, $\omega_0(\nabla) = Tr(I_L)$ è il rango di L. Essa è quindi localmente costante (anzi abbiamo supposto di considerare solo moduli di rango costante) quindi è chiusa. Per $r > 0$ si ha $d(Tr(\mathfrak{R}^r)) = Tr\nabla(\mathfrak{R}^r)$. D'altra parte $\nabla(\mathfrak{R}^r) = \sum_0^r \mathfrak{R}^i \cdot (\nabla\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{R}^{r-i-1} = 0$ perché per la formula di Bianchi $\nabla\mathfrak{R} = 0$.

Lemma 21 *Se R ha caratteristica* 0 *, la classe di coomologia di ω_r è indipendente dalla connessione ∇ e dipende solo dal modulo L. Essa sarà indicata con* $\omega_r(L)$

Dim. Sia $\Psi \in A^1(\mathrm{End}(L))$. Sia t una indeterminata su R e prendiamo i coefficienti nell'anello dei polinomi $R[t]$ (ossia tensoriziamo per $R[t]$ il modulo L la connessione ∇ e la $1-$forma Ψ ed ilmodulo di derivazioni D). L'espressione $\nabla_t = \nabla + t \cdot \Psi$ è interpretabile allora come una connessione su L "dipendente da un parametro" che per ogni $t \in R$ dà una connessione (con coefficienti in R) per L. La forma forma caratteristica associata a tale ∇_t è:

$$\omega_t = Tr\big((\mathfrak{R} + t\nabla\Psi + t^2\Psi^2)^r\big)$$

Questa induce (è di fatto interpretabil;e come) una applicazione polinomiale di R nel modulo $\mathbb{Z}^{2r}$ delle $2r-$forme chiuse su R. Consideriamo la derivata rispetto a t di tale forma; si ottiene:

$$\frac{d}{dt}Tr(\mathfrak{R} + t\nabla\Psi + t^2\Psi^2)^r = Tr\nabla(\mathfrak{R} + t\nabla\Psi + t^2\Psi^2)^r Tr\sum_0^r \mathfrak{R}^h(\nabla\Psi)\mathfrak{R}^{r-h-1} =$$

$$= rTr\sum_0^r \mathfrak{R}^{r-1}(\nabla\Psi) = rTr(\nabla^{2r-1}(\Psi))$$

D'altra parte per ogni $q \in \mathbb{N}$ si ha $d(Tr(\nabla^q\Psi)) = Tr\nabla^{q+1}\Psi$ e quindi tale derivata appatriene al modulo B^{2r} delle $2r-$forme chiuse su R. Si noti inoltre che ciò avviene non solo per la derivata calcolata in zero ma in ogni $t_0 \in R$ perchè la dipendenza iniziale da t è di primo grado. la dimostrazione è allora conclusa dal seguente lemma applicato per $M = Z^{2r}/B^{2r}$.

Lemma 22 *Sia $\sigma : R \to M$ una applicazione polinomiale a valori in un modulo M su un anello di caratteristica zero. Se la derivata σ' è nulla per ogni $t \in R$, allora $\sigma =\equiv 0$*

Da tali risultati per le forme ω_r , applicando l'esplicitazione data dalle formule di Newton si ottiene il seguente:

Corollario 23 *Sia ∇ una connessione sul modulo proiettivo finito L sull'anello R di caratteristica 0. Allora le forme $c_r(\nabla) = C^r(\mathfrak{R}(\nabla))$ sono chiuse; inoltre la loro classe di coomologia dipende solo da L e non dalla connessione scelta; essa sarà indicata con $c_r(L)$ e detta $r-$esima classe caratteristica di L*

Appendice 1: richiami di algebra commutativa

Convenzioni. Ogni anello è commutativo con identità moltiplicativa $1 \neq 0$; ogni omomorfismo di anelli conserva l'identità moltiplicativa. Un *ideale* in un anello R è un sottomodulo proprio di R considerato come modulo su se stesso. Con R^* indicheremo il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di R. Un sottoinsieme S di un anello R è detto *moltiplicativamente chiuso* se per $x, y \in S$ si ha $xy \in S$ ed inoltre $1 \in S$ e $0 \notin S$. Un ideale P di R è *primo* se $R - P$ è moltiplicativamente chiuso.

Il *radicale* du un ideale $\mathfrak{q}$ di R è l'ideale:

$$\sqrt{\mathfrak{q}} = \{f \in R \ : \ f^n \in \mathfrak{q} \quad \text{per qualche} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Proposizione 24 *Il radicale di un ideale coincide con l'intersezione di tutti gli ideali primi che lo contengono*

Dim. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo; se $f^n \in \mathfrak{p}$ per $f \in R$ ed $n \in \mathbb{N}$, allora necessariamente $f \in \mathfrak{p}$. Ciò mostra che $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{p}$ se $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Sia ora $f \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$; si deve mostrare che esiste un ideale primo $\mathfrak{p}$ che contiene $\mathfrak{q}$ e non contiene f. L'insieme degli ideali $\mathfrak{o}$ di R contenenti $\mathfrak{q}$ ma con $f^n \notin \mathfrak{o}$ per $n \in \mathbb{N}$ è non vuoto ed induttivo. Sia $\mathfrak{p}$ un suo elemento massimale; basterà mostrare che $\mathfrak{p}$ è primo. Siano infatti a , $b \notin \mathfrak{p}$; allora $\mathfrak{q} + (a)$ e $\mathfrak{q} + (b)$ contengono qualche potenza di f. Ne segue che $\mathfrak{q} + (ab)$ contiene qualche potenza di f e quidi $ab \notin \mathfrak{p}$.

Corollario 25 *In un anello R l'intersezione di tutti gli ideali primi è il radicale di* (0) *(che viene detto* radicale dell'anello *R)*

Lo spettro primo di un anello

L'insieme $X = Spec(R)$ degli ideali primi dell'anello R viene chiamato *spettro primo* di R . Per $\mathfrak{p} \in X$ ed $f \in R$ indicheremo con $f(\mathfrak{p})$ l'immagine di f in $R/\mathfrak{p}$. In particolare $f(\mathfrak{p}) = 0$ se e solo se $f \in \mathfrak{p}$; diremo in tal caso che f si *annulla* in $\mathfrak{p}$ o che $\mathfrak{p}$ è uno *zero* di f. L'insieme dei $\mathfrak{p} \in X$ in cui f non si annulla verrà indicato con X_f.

E' chiaro che se qualche potenza di g è multipla di f, allora $X_g \subset X_f$. Indicando con (f) l'ideale generato in R da f , ciò può essere riformulato dicendo che se $g \in \sqrt{(f)}$ allora $X_g \subset X_f$. L'implicazione inversa a questa segue dalla caratterizzazione del radicale di un ideale come intersezione dei primi che lo contengono. Si ha quindi:

Proposizione 26 *Per f , $g \in R$ si ha:*

$$g \in \sqrt{(f)} \Leftrightarrow X_g \subset X_f$$

Introduciamo una topologia su $X = Spec(R)$ imponendo che X_f sia aperto per ogni $f \in R$ o , equivalentemente, che gli zeri di ogni tale f costituiscano un insieme chiuso. La meno fine tra tali topologie è quella in cui le X_f costituiscono una subbase; ossia una cui base è data dalle intersezioni finite di tali insiemi. Si noti comunque che per $f, g \in R$ si ha $X_f \cap X_g = X_{fg}$; ne segue che la famiglia $\{X_f \ : \ f \in R\}$ costituisce già una base per una topologia su $Spec(R)$ che sarà detta la *topologia di Zariski*.

Se $H \subset R$ è un sottoinsieme, indicheremo con $\mathcal{Z}(H)$ l'insieme dei primi $\mathfrak{p}$ di R che contengono H. Se $K \subset Spec(R)$ è un sottoinsime, indicheremo con $\mathcal{I}(K)$ l'insieme degli $f \in R$ che sono nulli in ogni elemento di K (ossia $\mathcal{I}(K)$ è l'intersezione degli elementi di K). Le applicazioni $\mathcal{Z} \circ \mathcal{I}$ e $\mathcal{I} \circ \mathcal{Z}$ hanno quadrato identità rispettivamente sugli insiemi dei sottoinsiemi di X e di R. Se ne deduce una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi chiusi di X e l'insieme degli ideali di R che coincidono con il proprio radicale. Chiameremo $\mathcal{Z}$ *luogo di zeri* e $\mathcal{I}$ *ideale di definizione.*

Un sottoinsieme di X è detto un aperto affine se è del tipo X_f per qualche $f \in X$, ossia se il complementare ha un ideale di definizione principale. Per quanto visto sopra se $f, g \in R$ si ha $X_f = X_g \Leftrightarrow$ qualche potenza di f è multipla di g e qualche potenza di g è multipla di f.

Sia $\mathfrak{p} \in Spec(R)$; la chiusura topologica dell'insieme $\{\mathfrak{p}\}$ è costituita da tutti gli ideali primi che lo contengono. Se $\mathfrak{p}$ non è massimale quindi esso non è un punto chiuso. L'insieme dei punti chiusi di $Spec(R)$, costituito quindi dagli ideali massimali di R viene detto *spettro massimale* di R ed indicato con $Spec_m(R)$. Alcune volte sarà sufficiente studiare $Spec_m(R)$ per determinare proprietà di R; ma in alcune occasioni tutto $Spec(R)$ sarà necessario.

Anello dei quozienti

Sia S un insieme moltiplicativamente chiuso in un anello R. Diremo che un omomorfismo di anelli $\phi : R \to T$ *rende invertibili* gli elementi di S se $\phi(s)$ è invertibile in T per ogni $s \in S$. Diremo che l' omomorfismo $\phi : R \to R'$ è un *anello delle frazioni* di R con *denominatori* in S se gode le seguenti proprietà:

1. ϕ rende invertibili gli elementi di S
2 ogni omomorfismo ψ di R in un anello T che renda invertibili gli elementi di S, è la composizione di ϕ con un omomorfismo $h : R \to T$ univocamente determinato da questa condizione

E' ovvio che se tale $\phi : R \to R'$ esiste esso è univocamente determinato a meno di isomorfismi che siano l'identità su R; ossia se $\bar{\phi} : R \to \bar{R}'$ ha anche le proprietà 1. e 2. , esiste un isomorfismo $h : R' \to \bar{R}'$ con $h \circ \phi = \bar{\phi}$.

L'esistenza è data dalla costruzione seguente:

nel prodotto $R \times S$ identifichiamo (a_1, s_1) con (a_2, s_2) se esiste $s \in S$ tale che $s(a_2 s_1 - a_1 s_2) = 0$. Indichiamo con R_S l'insieme quoziente. Definiamo una somma ed un prodotto in R_S ponendo per $a_1, a_2 \in R$ e $s_1, s_2 \in S$:

$$[(a_1, s_1)] + [(a_2, s_2)] = [(a_1 s_2 + a_2 s_1, s_1 s_2)]$$

$$[(a_1, s_1)] \cdot [(a_2, s_2)] = [(a_1 a_2, s_1 s_2)]$$

Si verifica facilmente che tali operazioni sono ben definite e che danno ad R_S una struttura di anello (con identità $[(1, 1)]$ diversa da $0 = [(0, 1)]$). Definendo $\phi : R \to R_S$ con la formula $\phi(a) = [(a, 1)]$, si ottiene un omomorfismo che verifica le condizioni 1. e 2. di sopra e quindi è un anello delle frazioni di R con denominatori in S.

Il nucleo di $\phi : R \to R_S$ è costituito dagli $a \in R$ tali che $sa = 0$ per qualche $s \in S$; diremo allora che a è *ucciso* da S.

Siano ora $S \subset S'$ due insiemi moltiplicativamente chiusi di R. L'omomorfismo naturale $\psi : R_S \to R_{S'}$ è iniettivo se S e S' uccidono gli stessi elementi.

Sia S un insieme moltiplicativamente chiuso in R; il prodotto R^*S è un insieme moltiplicativamente chiuso che indicheremo con S' Sia poi $\tilde{S}$ l'insieme degli $f \in R$ tali che $f^r \in S'$ per qualche r intero positivo. Anche tale $\tilde{S}$ è moltiplicativamente chiuso contiene S e come si può vedere facilmente l'omomorfismo naturale $R_S \to R_{\tilde{S}}$ è un isomorfismo.

Lemma 27 *$R - \tilde{S}$ è l' unione degli ideali primi di R che sono disgiunti da S*

Anzitutto è chiaro che gli ideali primi disgiunti da S e quelli disgiunti da $\tilde{S}$ sono gli stessi.

Sia ora $f \in R - \tilde{S}$. Consideriamo la famiglia degli ideali di R contenenti f e disgiunti da $\tilde{S}$: essa è non vuota perché l'ideale principale (f) vi appartiene ed è chiaramente induttiva. Se $\mathfrak{p}$ è un suo elemento massimale , esso è primo. Siano infatti $x, y \notin \mathfrak{p}$; per la massimalità di $\mathfrak{p}$ esistono $a, b \in R$ e $p, q \in \mathfrak{p}$ tali che $ax+p$ e $by+q$ appartengano ad $\tilde{S}$. Se fosse $xy \in \mathfrak{p}$ si avrebbe che $(ax+p)(by+q)$ stà in $\mathfrak{p} \cap \tilde{S}$ contro l'ipotesi fatta su $\mathfrak{p}$.

Proposizione 28 *Siano S un insieme moltiplicativamente chiuso in R e sia $\phi : R \to R_S$ l'omomorfismo canonico associato. L'insieme degli $a \in R$ che divengono invertibili in R_S è costituito dall'insieme moltiplicativamente chiuso $\tilde{S}$ definito sopra.*

Sia ancora S un insieme moltiplicativamente chiuso nell'anello R e sia M un $R-$modulo. Si costruisce in modo analogo a quello seguito per R_S un R_S-modulo M_S , quozientando in modo facilmente immaginabile il prodotto $M \times S$; esso sarà detto il modulo delle frazioni di M con denominatori in S.
La proprietà funtoriale caratterizzante il modulo M_S è la seguente: siano M un $R-$modulo, $\psi : R \to T$ un omomorfismo che rende invertibili gli elementi di S , N un $T-$modulo e $\sigma : M \to N$ un omomorfismo di $R-$ moduli (ogni $T-$ modulo è anche un $R-$modulo tramite ψ); esiste allora uno ed un sol omomorfismo di R_S- moduli $\sigma' : M_S \to N$ (N è un modulo su R_S tramite l'omomorfismo di R_S in T indotto da ψ) che composto con l'applicazione naturale $M \to M_S$ dia l'omomorfismo σ.

Se S è il complementare di un ideale primo $\mathfrak{p}$ poniamo $R_{\mathfrak{p}} = R_S$ e $M_{\mathfrak{p}} = M_S$. Se $f \in R$ non è nihilpotente, $S = (f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un insieme moltiplicativamente chiuso e R_S e M_S saranno indicati con R_f e M_f.

Si noti che se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo nell'anello R , allora $R_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale; precisamente l'unico suo ideale massimale $\mathfrak{m}$ è quello generato da $\mathfrak{p}$. L'omomorfismo di R in R_S induce un omomorfismo di $R/\mathfrak{p}$ in $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{m} = k$ che è precisamente il passaggio da un dominio di integrità al suo corpo delle frazioni.