Forme differenziali di grado uno

Sia X una varietà differenziabile. Una applicazione $\omega : T(X) \to \mathbb{R}$ è detta una forma *differenziale* (più precisamente una $1-$*forma* o *forma differenziale di grado uno*) se per ogni $x \in X$ la sua restrizione allo spazio tangente ad X in x è lineare. In tal caso per il valore di ω su un vettore v tangente ad X in x sarà indicato con $\omega(x)[v]$. Una tale ω sarà detta una forma differenziale *differenziabile* (o *continua* o..) se tale è in quanto applicazione di $T(X)$ in $\mathbb{R}$. D'ora in poi ogni forma differenziale sarà supposta differenziabile.

L'insieme delle $1-$forme su X costituisce uno spazio vettoriale che indicheremo con $A^1(X)$. L'algebra $\mathcal{E}(X)$ delle funzioni differenziabili su X sarà spesso considerata dotata solo della sua struttura di spazio vettoriale; in tal caso la indicheremo col simbolo $A^0(X)$. La differenzazione di funzioni fornisce un operatore lineare $d : A^0(X) \to A^1(X)$; il nucleo di d sono le funzioni localmente costanti su X (costanti su ogni componente connessa). L'immagina di d è indicata con $B^1(X)$ ed i suoi elementi sono detti *forme esatte* o *integrabili.* Per $\omega \in B^1(X)$ ogni $f \in A^0(X)$ tale che $df = \omega$ viene detta una *primitiva* o *integrale* o *potenziale* di ω. Una forma $\omega \in A^1(X)$ è detta *chiusa* se è localmente integrabile ossia se ogni punto di X ha un intorno aperto sul quale ω è integrabile. Lo spazio vettoriale delle forme chiuse sarà indicato con $Z^1(X)$. Lo spazio vettoriale quoziente $H^1(X) = Z^1(X)/B^1(X)$ viene detto spazio di *coomologia di grado uno* di X.

Siano $\phi : X \to Y$ una applicazione differenziabile tra varietà e $\omega \in A^1(Y)$; se v è un vettore tangente ad X in un punto x , poniamo:

$$\phi^*(\omega)(x)[v] = \omega(x)[d\phi(x)[v]]$$

ossia trasformiamo col differenziale di ϕ in x il vettore v in un vettore tangente ad Y nel punto $\phi(x)$ e calcoliamo su esso la ω. Evidentemente $\phi(\omega)$ è una forma differenziale su X ed è differenziabile essendo composizione di $d\phi$ con ω. Definiamo anche $\phi^* : A^0(Y) \to A^0(X)$ associando ad $f \in A^0(Y)$ la funzione $f \circ \phi$. Per $f \in A^0(Y)$ dalla formula di differenzazione di una composizione di applicazioni differenziabili si ottiene l'eguaglianza:

$$\phi^*(df) = d(\phi^*(f))$$

Questa dice che se ω è integrabile (risp. localmente integrabile) su Y allora $\phi^*(\omega)$ è integrabile (risp. localmente integrabile) su X , ossia che $\phi^*(B^1(Y)) \subset B^1(X)$ e $\phi^*(Z^1(Y)) \subset Z^1(X))$; se ne deduce quindi un omomorfismo naturale $\phi^* : H^1(Y) \to H^1(X)$. Ancora dalla formula di differenzazione di una composizione si deduce che se $\phi : X \to Y$ e $\psi : Y \to Z$ sono differenziabili, allora $(\phi \circ \psi)^* = \phi^* \circ \psi^*$. Si vede così che associando ad una varietà il suo spzio di coomologia di grado uno si ottiene un funtore dalla categoria delle varietà differenziabili in quella degli spazi vettoriali il che si esprime talvolta dicendo che la coomologia di una varietà è un invariante naturale.

Uso delle coordinate Supponiamo che X sia un aperto in $\mathbb{R}^n$ con coordinate $x_1, ..., x_n$. Allora $A^1(X)$ è l'$\mathcal{E}(X)-$modulo libero sulle $1-$forme $dx_1, ..., dx_n$; ossia per ogni $\omega \in A^1(X)$ esistono univocamente determinate $a_1, ..., a_n \in \mathcal{E}(X)$ tali che $\omega = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n$. Una tale ω è esatta se e solo se esite una $f : X \to \mathbb{R}$ differenzaibile e tale che $a_i = \partial f / \partial x_i$ per $i = 1, ..., n$. Dal corso di analisi si sa che essa è chiusa se e solo se si ha $\partial a_i / \partial x_j = \partial a_j / \partial x_i$ per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Siano ora X una varietà qualsiasi, $\omega \in A^1(X)$ e $\gamma : [a, b] \to X$ un arco differenziabile. Allora $\gamma^*(\omega)$ è una $1-$forma su $[a, b]$ e si potrà quindi scrivere $\gamma^*(\omega) = f(t)dt$ ove t è la coordinata su $[a, b]$ ed f è una funzione differenziabile. Poniamo:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega) = \int_a^b f(t)dt$$

Fissato γ si ha così un omomorfismo:

$$\int_\gamma : A^1(X) \to \mathbb{R}$$

Si noti che se $t = \sigma(s)$ è una applicazione differenziabile da $[c, d]$ in $[a, b]$ tale che $\sigma(c) = a$ e $\sigma(d) = b$ si ha l'eguaglianza

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(\sigma(s))\sigma'(s)ds$$

Ciò significa che se $\gamma' : [c, d] \to X$ è ottenuto componendo σ con un arco $\gamma : [a, b] \to X$, allora gli omomorfismi $\int_\gamma$ e $\int_{\gamma'}$ coincidono. Si può quindi supporre che ogni tale omomorfismo sia definito da un arco che è costante in un intorno di a ed in uno di b. In tal modo se $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ sono archi differenziabili consecutivi, ossia se $\alpha(1) = \beta(0)$ allora l'arco $\alpha * \beta$ (definito nell'ambito dello studio del gruppo fondamentale) è un arco differenziabile e le applicazioni lineari da essi definite su $A^1(X)$ verificano la relazione:

$$\int_{\alpha * \beta} = \int_\alpha + \int_\beta$$

Se f è una primitiva di ω il teorema di Torricelli per funzioni di una variabile dà:

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

In particolare se γ è un arco chiuso ed ω è un differenziale esatto si ha $\int_\gamma \omega = 0$ e conseguentemente una tale γ induce una applicazione lineare:

$$\int_\gamma : H^1(X) \to \mathbb{R}$$

Proposizione 1 *Una forma differenziale ω è integrabile se e solo se per ogni arco differenziabile chiuso γ in X si ha $\int_\gamma \omega = 0$*

Dim. Se ω ha una primitiva abbiamo già visto che essa ha integrale nullo su ogni arco differenziabile chiuso.Vediamo l'altra implicazione.

Possiamo supporre X connessa, quindi connessa per archi differenziabili. Fissato un punto base $x_0 \in X$ definiamo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ ponendo per $x \in X$:

$$f(x) = \int_\gamma \omega$$

ove γ è un qualsiasi arco differenziabile che parte da x_0 e termina in x; per ipotesi tale valore non dipende dal particolare arco che si sceglie. Verifichiamo che f è una primitiva di ω. Se U è un intorno aperto connesso di un punto $x_1 \in X$, il valore di f in un punto $x \in U$ si può ottenere aggiungendo ad $f(x_1)$ l'integrale di ω su un arco in U che va da x_1 ad x. Ciò permette di ricondurre la dimostrazione, tramite l'uso di una carta locale, ad una palla di $\mathbb{R}^n$. Calcolando i rapporti incrementali lungo gli assi, si verifica allora facilmente che le derivate parziali di f coincidono con le componenti di ω rispetto ai differenziali delle coordinate locali e quindi che $df = \omega$.

Nella definizione di integrale di una forma differenziale ω su un arco γ è essenziale che γ sia differenziabile; vedremo però ora che se la forma ω è chiusa, l'integrale può essere definito anche per un arco che sia solo continuo. Descriveremo tre modi equivalenti in cui ciò può essere fatto. Un primo modo consiste nell'approssimare l'arco continuo con un arco differenziabile avente gli stessi estremi e di dimostrare quindi che ω ha lo stesso integrale su due tali approssimazioni se sufficientemente vicine. L'esistenza di approssimazioni differenzabili si ottiene con l'uso di un intorno tubolare così come il fatto che due tali approssimazioni sono differenziabilmente omotope. Rilevando la forma omega sul quadrato $[0,1]^2$ che è semplicemente connesso si ottiene l'eguaglianza dell'integrale sui due archi. Si noti che ciò dimostra anche che una forma chiusa ha lo stesso integrale su due cammini omotopi a estremi fissi, cosa che viene ottenuta anche col successivo terzo metodo.
Un secondo modo utilizza la nozione di rivestimento universale. Sia X una varietà differenziabile e sia $p : \tilde{X} \to X$ il suo rivestimento universale; su tale $\tilde{X}$ esiste una unica struttura di varietà differenziabile per la quale p è differenziabile e priva di punti critici. La forma $\tilde{\omega} = p^*(\omega)$ è chiusa su $\tilde{X}$ ed essendo questo semplicamente connesso, essa ha una primitiva $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$. Se $\gamma : [a,b] \to X$ è un arco continuo, sia $\gamma_1 : [a,b] \to \tilde{X}$ un suo sollevamento, ossia un arco continuo tale che $p \circ \gamma_1 = \gamma$. Si definisce allora $\int_\gamma \omega = \tilde{f}(\gamma_1(b)) - \tilde{f}(\gamma_1(a))$; se γ_2 è un altro sollevamento di γ, esiste un automorfismo μ di $\tilde{X}$ (ossia $\mu : \tilde{X} \to \tilde{X}$ è continua e verifica $p \circ \mu = p$: essa è necessariamente un diffeomorfismo) tale che $\gamma_1 = \mu \circ \gamma_2$. Basta allora osservare che allora anche $\tilde{f} \circ \mu$ è una primitiva di $\tilde{\omega}$ e quindi differisce da $\tilde{f}$ per una costante , perchè $\tilde{X}$ è connesso. Quindi l'oscillazione di $\tilde{f}$ tra gli estremi dei due sollevamenti è la stessa e la definizione di $\int_\gamma$ non dipende dal particolare sollevamento utilizzato.
Il terzo metodo di definire l'integrale utilizza un ricoprimento buono $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X. Sia $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ una primitiva di ω su U_i (esiste perché U_i è semplicemente connesso). Per ogni arco continuo $\gamma : [a,b] \to X$ esiste una suddivisione $a = t_0 \le t_1 \le ... \le t_r = b$ tale che ogni $\gamma([t_{h1,h})$ sia contenuto in un U_{i_h} del ricoprimento fissato per $h = 1, ..., r$. Si definisce allora:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{h=1}^{r} (f_{i_h}(t_h) - f_{i_h}(t_{h-1}))$$

Per verificare che questa definizione non dipende dalle scelte fatte si verifica prima che la scelta delle particolari primitive non è rilevante così come la scelta del particolare U_{i_h} contenete $\gamma([t_h - 1, t_h])$. Poi che se si introduce una divisione ulteriore tra t_{h-1} e t_h si ha ancora lo stesso valore il che permette di verificare che il valore definito non dipende dal particolare ricoprimento scelto. Con considerazioni analoghe si dimostra facilmente anche che tale integrale oltre ad essere ben definito per un arco continuo γ non cambia durante una omotopia ad estremi fissi. Infatti se una tale omotopia dipende da un parametro s, ogni s_0 fissato possiede un intorno per il quale tutte le scelte fatte (suddivisione e scelta degli aperti conteneti le immagini dei sottointervalli) vanno bene simultaneamente per tutti gli archi da lui parametrizzati.

Lasciamo per esercizio la verifica che tutti e tre questi metodi di integrare una forma chiusa su un cammino continuo danno lo stesso risultato.

Sia $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ il gruppo fondamentale di una varietà differenziabile con punto base x_0. L'integrazione di forme chiuse induce una applicazione:

$$H^1(X) \times \Pi \ni (\omega, \gamma) \mapsto \int_\gamma \omega \in \mathbb{R}$$

che è "bilineare" nel senso che è lineare in ω per ogni fissato γ ed è un omomorfismo di Π in $\mathbb{R}$ per ogni fissata classe in $H^1(X)$; considerando $Hom(\Pi, \mathbb{R})$ con la sua struttura ovvia di spazio vettoriale, si ottiene così una applicazione lineare naturale $\nu : H^1(X) \to Hom(\Pi, \mathbb{R})$.

Teorema 2 (Teorema di de Rham in dimensione uno)
Se X è una varietà connessa l'omomorfismo ν sopra definito è un isomorfismo

Dim. Iniettività di ν : si deve verificare che se ω è una forma chiusa su X la cui classe $[\omega]$ in $H^1(X)$ viene annullata da ν allora $[\omega] = 0$. Essere annullata da ν significa che ω ha integrale nullo su ogni cammino chiuso di origine x_0. Se γ è un qualsiasi cammino chiuso in X detta x_1 la sua origine e scelto un cammino δ da x_0 a x_1 , l'integrale di ωsu γ è uguale al suo integrale su $\delta * \gamma * \delta^{-1}$ che è nullo; quindi ω è integrabile.
Surgettività di ν : occorre mostrare che se $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ è un omomorfismo, allora esiste una 1-forma chiusa ω tale che $\int_\gamma \omega = \sigma(\gamma)$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. La costruzione di tale ω si fa utilizzando un buon ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X, con aperto base U_{i_0} contenente x_0 nel modo seguente.
Siano fissati i seguenti dati:
-per $i \in I$, un punto $x_i \in U_i$ ed un cammino continuo γ_i da x_0 a x_i.
-per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, un cammino continuo γ_{ij} in $U_i \cup U_j$ da x_i a x_j.
Consideriamo i cammini chiusi $\delta_{ij} = \gamma_i * \gamma_{ij} * \gamma_j^{-1}$ per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e poniamo $c_{ij} = \sigma(\delta_{ij})$. Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento, $U_i \cup U_j \cup U_k$ è semplicemente connesso per cui si ha la relazione $\delta_{ij} * \delta_{jk} = \delta_{ik}$ e di conseguenza $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$.

Sia $(\phi_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. Per $x \in U_i$ poniamo:

$$f_i(x) = \sum_{h \in I'} c_{ih} \phi_h(x)$$

ove I' indica l'insieme degli $h \in I$ per cui $x \in U_h$. Se $x \in U_i \cap U_j$ si ha:

$$f_i(x) - f_j(x) = \sum_{h \in I'} (c_{ih} - c_{jh}) \phi_h$$

Per $h \in I'$ si ha $U_i \cap U_j \cap U_h \neq \emptyset$ e quindi $c_{ih} - c_{jh} = c_{ij}$ non dipende da h. Allora

$$f_i(x) - f_j(x) = c_{ij} \cdot \sum_{h \in I'} \phi_h(x) = c_{ij}$$

perché $\phi_h(x) = 0$ se $h \notin I'$. Le f_i differiscono così sull'intersezione di due elementi di U per una costante: i loro differenziali definiscono quindi una 1-forma chiusa globale ω di cui le f_i sono delle primitive locali. Ciò, ricordando la definizione data avanti di integrale su un cammino continuo, dimostra che per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ si ha $\sigma(\omega) = \int_\gamma \omega$ e la dimostrazione è conclusa.

Nota : Come asserito in precedente occasione, i cammini δ_{ij} utilizzati nella precedente dimostrazione, costituiscono (inducono) un sistema di generatori per $\pi_1(X, x_0)$. Infatti se $\gamma : [0,1] \to X$ è un cammino chiuso di origine x_0, esiste una decomposizione $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r = 1$ tale che ogni intervallo $[t_h, t_{h+1}]$ venga applicato entro un elemento $U_{i(h)}$ del ricoprimento dato. Con una omotopia si può deformare γ in modo che per ogni h il punto medio s_h di $[t_h, t_{h+1}]$ venga applicato in $x_{i(h)}$ (infatti gli elementi di $\mathcal{U}$ sono connessi); con un altra omotopia il cammino tra s_h e s_{h+1} viene portato a coincidere con $\gamma_{i(h)i(h+1)}$ (infatti le intersezioni non vuote di due elementi di $\mathcal{U}$ sono semplicemente connesse). Inserendo i cammini $\gamma_{i(h)} * \gamma_{i(h)}^{-1}$ si è finalmente deformato γ in un prodotto di δ_{ij}. Ricordando poi che $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al gruppo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$ costruito con i cammini formali modulo le relazioni di espansione e contrazione elementare, si ottiene che un insieme di relazioni di definizione per $\pi_1(X, x_0)$ sui generatori δ_{ij} è costituito dalle $\delta_{ij} * \delta_{jk} = \delta_{ik}$ per $i, j, k \in I$ tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

Si ha quindi il seguente:

Corollario 3 *Una varietà connessa sulla quale esiste un buon ricoprimento finito, ha un gruppo fondamentale finitamente presentato. In particolare $H^1(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita*

Periodi di 1-forme chiuse

Siano X una varietà connessa, $x_0 \in X$ e ω una 1-forma chiusa su X. Integrando ω sugli elementi di $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ si ottiene un omomorfismo σ di Π in $\mathbb{R}$; la sua immagine Γ è un sottogruppo di $\mathbb{R}$ che è detto *gruppo dei periodi* di ω. Abbiamo visto che tale gruppo è nullo se e solo se ω ha una primitiva. Esaminiamo il caso che sia non nullo. Sia $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x)$ il rivestimento universale di X. Allora $\tilde{\omega} = \phi^*\omega$ è chiusa in $\tilde{X}$ ed esiste quindi una $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = 0$ e $d\tilde{f} = \tilde{\omega}$. Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ opera su $\tilde{X}$ come gruppo di omeomorfismi e si ha $\tilde{f}(\gamma x) = \tilde{f}(x) + \sigma(\gamma)$. Supponiamo che il sottogruppo dei periodi $\Gamma \subset \mathbb{R}$ sia discreto non nullo: ossia che esso sia l'insieme dei multipli interi di un $a \in \mathbb{R}$. Allora, posto $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \simeq S^1$ si ha una unica $f : X \to S^1$ con $f(x_0) = 1$ e $f \circ \phi = \tau \tilde{f}$. Tale f soddisfa la seguente proprietà: se $d\theta$ è la 1-forma su S^1 invariante per traslazioni e tale che $\int_{S^1} d\theta = 1$ allora $\omega = f^*(ad\theta)$. L'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ si fattorizza quindi così :

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{f_*}{\to} \pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z} \stackrel{\lambda}{\to} \mathbb{R}$$

ove λ è la moltiplicazione per a.

Ma in generale il sottogruppo dei periodi di ω non è discreto in $\mathbb{R}$. Ad esempio per $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $\omega = dx_1 + \sqrt{2}dx_2$, il sottogruppo dei periodi è il gruppo Γ generato in $\mathbb{R}$ da 1 e $\sqrt{2}$ che è denso in $\mathbb{R}$. Il quoziente $\mathbb{R}/\Gamma$ non ha quindi strutture geometriche naturali (ad esempio la sua topologia quoziente è quella banale). Si prova allora a rifare quanto precede simultaneamente per più forme: siano assegnate 1-forme chiuse $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sulla varietà connessa X; si ha allora una applicazione differenziabile $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r) : \tilde{X} \to \mathbb{R}^r$ tale che $\tilde{f}(x_0) = 0$ e $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r)$ ove $\tilde{\omega}_i = \phi^* \omega_i$.

Si considera ora l'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}^r$ definito da

$$\sigma(\gamma) = \begin{pmatrix} \int_\gamma \omega_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \omega_r \end{pmatrix}$$

che ha come immagine in $\mathbb{R}^r$ un sottogruppo Γ che verrà detto *gruppo dei periodi simultanei* di $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Se Γ è discreto in $\mathbb{R}^r$, allora $\mathbb{R}^r/\Gamma$ è una varietà differenziabile (diffeomorfa al prodotto $(S^1)^h \times \mathbb{R}^{r-h}$ ove h è il rango di Γ) e si costruisce come sopra una $f : X \to \mathbb{R}^r/\Gamma$ con $f(x_0) = 0$ e $f^*(dx_i) = \omega_i$ per $i = 1, \ldots, r$ (ove $x_1, \ldots, x_r$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^r$).

Vediamo un caso particolare in cui ciò accade che è sostanzialmente modellato sul cosidetto metodo di inversione degli *integrali ellittici* che verrà esaminato nell'ambito delle funzioni di variabile complessa.

Teorema 4 *Sia X una varietà differenziabile connessa e compatta di dimensione n e siano $\omega_1, \ldots \omega_n$ 1-forme chiuse su X tali che per ogni $x \in X$, $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ siano una base del duale di $T_x(X)$. Allora il gruppo Γ dei periodi è discreto di rango n e l'applicazione f da X nel toro n-dimensionale $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ottenuta integrando le 1-forme date è un diffeomorfismo.*

Dim. Consideriamo come sopra l'applicazione $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^n$ ottenuta integrando le $\tilde{\omega}_i = \phi^*(\omega_i)$ sul rivestimento universale $\phi : \tilde{X} \to X$ a partire dal punto base $\tilde{x}_0$. Mostreremo che essa è un rivestimento: essendo $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessa ne seguirà che essa è un diffeomorfismo. Per dimostrare che è un rivestimento mostreremo il fatto seguente (vedi la nota che segue la dimostrazione) che per semplicità di esposizione sarà formulato in termini di una metrica su X compatibile con la sua topologia (ad esempio quella indotta da una sua realizzazione come sottovarietà di $\mathbb{R}^n$):

- $\tilde{f}$ è localmente invertibile in modo uniforme nel senso che esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in \tilde{X}$, $\tilde{f}$ induce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di x in $\tilde{X}$ ed un aperto contenente la palla di centro $\tilde{f}(x)$ e raggio r in X.

Ed infatti $\tilde{f}$ è un diffeomorfismo locale perché $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n)$ è per ipotesi unisomorfismo tra $T_x(\tilde{X})$ e $\mathbb{R}^n$. Inoltre in due punti aventi la stessa proiezione su X , $\tilde{f}$ differisce di una costante additiva e dà quindi la stessa *copertura* dell'immagine in $\mathbb{R}^n$; essendo X compatta si deduce l'esistenza di un $r > 0$ come richesto.

Resta da verificare che nel rivestimento $\tilde{f}^{-1} \circ \phi : \mathbb{R}^n \to X$, due punti di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa immagine in X se e solo se differiscono per un elemento di Γ. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ con la stessa immagine $x$in X; quindi provengono da punti $a, b \in \tilde{X}$ che si proiettano in x. Sia γ un cammino continuo in $\tilde{X}$ da a a b e sia $\bar{\gamma}$ la sua immagine in X; i valori α, β di $\tilde{f}$ in a, b differiscono per

$$\alpha - \beta = \begin{pmatrix} \int_\gamma \tilde{\omega}_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \tilde{\omega}_n \end{pmatrix}$$

Essendo $\int_\gamma \tilde{\omega}_i = \int_{\tilde{\gamma}} \omega_i$ per tutti gli i, tale differenza è uno dei periodi simultanei. Siano ora $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Gamma$ e $a, b \in \tilde{X}$ le controimmagini tramite $\tilde{f}$ di α e $\alpha + \lambda$. Dobbiamo mostrare che a e b hanno la stessa proiezione in X. Sia λ ottenuto integrando le ω_i su un cammino chiuso γ che possiamo prendere di origine $\phi(a)$. Rilevando γ in $\tilde{X}$ a partire da a, si terminerà in un punto a' che ha la stessa immagine di a in X. Siccome il valore di $\tilde{f}$ in a' differisce come b da quello in a ed $\tilde{f}$ è iniettiva, si ha $a' = b$ e quindi a e b hanno la stessa immagine in X.
Il fatto che Γ è discreto di rango massimo deriva dal fatto che X è di Hausdorff e compatta.

Nota. Ogni spazio topologico di cui si parlerà in questa nota sarà supposto di Hausdorff, localmente contrattile (ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni che sono contrattili) e metrico, anche se gran parte di queste condizioni sono sovrabbondanti per i risultati che otterremo.

La nozione di rivestimento può essere introdotta in tre modi equivalenti; alla base di tutti cè una applicazione continua $\phi : X \to Y$ tra spazi topologici connessi che è localmente invertibile nel senso che :
($\sharp$) ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che $V = \phi(U)$ è aperto in Y e ϕ dà un omeomorfismo tra U e V.
Una *sezione* di ϕ su un sottoinsieme $V \subset Y$ è una applicazione continua $s : V \to X$ tale che $\phi \circ s$ sia l'identità su V. Se la ($\sharp$) è valida, l'insieme dei punti ove due sezioni di ϕ su V coincidono è aperto e chiuso in V quindi vuoto o tutto V nel caso questo sia connesso.

Def. Una applicazione ϕ come sopra è detta un *rivestimento* se una delle seguenti condizioni equivalenti è verificata:
1) ogni $y \in Y$ ha un intorno connesso V tale che $\phi^{-1}(V)$ sia l'unione (necessariamente disgiunta per quanto osservato sopra) delle immagini delle sezioni di ϕ su V; ossia ogni sua componente connessa è omeomorfa a V tramite ϕ.
2) esiste una funzione continua positiva $\epsilon : Y \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $y \in Y$ ed $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ sulla palla di centro y e raggio $\epsilon(y)$ tale che $s(y) = x$.
3) *sollevamento dei cammini*: per ogni cammino continuo $\beta : [0,1] \to Y$ ed ogni $x \in \phi^{-1}(\beta(0))$ esiste un cammino $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\phi \circ \alpha = \beta$.

La validità della condizione ($\sharp$), nel caso di una applicazione tra varietà differenziabili, è assicurata se ϕ non ha punti critici. Le condizioni equivalenti 1) , 2) e 3) sono allora automatiche se ϕ è propria; se essa non lo è, può invece accadere che l'intorno V di un $y \in Y$ sul quale ϕ si inverte non si possa scegliere indipendentemente da $x \in \phi^{-1}(y)$ e diviene allora necessario stimare quanto grande sia per $x \in X$ l'intorno V di invertibilità di ϕ fornito dal teorema di inversione locale al variare di $\phi(x)$ in Y.

La condizione 1) è quella di solito utilizzata per definire i rivestimenti. La 2) è stata espressa utilizzando una metrica su Y unicamente perché è spesso più facile esprimere maggiorazioni in termini numerici che insiemistici; ma per dimostrare che essa è equivalente alla 1), è più semplice utilizzare la sua seguente formulazione equivalente che non fa ricorso a metriche anche se può apparire a prima vista meno chiara:
2') Esiste un intorno $\mathcal{V}$ della diagonale di $Y \times Y$ tale che per ogni $y \in Y$, detto V il sottoinsieme di Y per cui $\{y\} \times V = (\{y\} \times Y) \cap \mathcal{V}$ per ogni $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ su V con $s(y) = x$.

Per mostrare l'equivalenza tra le 1)-2) e la 3), la parte più difficile è dimostrare che da 3) segue 2). La dimostreremo come corollario del seguente:

Teorema 5 (di Monodromia) *Sia $\phi : X \to Y$ una applicazione continua verificante la condizione ($\sharp$) e quella sul sollevamento dei cammini. Allora ogni omotopia su Y si solleva in una omotopia su X se è fissato il suo sollevamento sulla faccia iniziale. Precisamente: se Z è uno spazio topologico e $f_0 : Z \to X$ e $F : Z \times [0,1] \to Y$ sono continue con $\phi(F(z,0)) = f_0(z)$ per ogni $z \in Z$, allora esiste $G : Z \times [0,1] \to X$ continua e tale che $\phi(G(z,t)) = F(z,t)$ e $G(z,0) = f_0(z)$ per ogni $(z,t) \in Z \times [0,1]$*

Dim. Per la condizione 3) si sollevano (in modo unico perché vale la ($\sharp$)) tutti i cammini dati dalla restrizione di F agli $\{z\} \times [0,1]$ a partire dagli $f_0(z)$; si trova quindi una $G : Z \times [0,1] \to X$ che solleva la F con le condizioni richieste salvo la continuità che è assicurata solo nella seconda variabile ogni volta che fissiamo la prima. Basterà quindi verificare che ogni $z \in Z$ ha un intorno A tale che G ristretta a $A \times [0,1]$ è continua; ed infatti, fissato z, esiste una decomposizione $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_r = 1$ ed aperti $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ per $i = 1, \ldots, r-1$, tali che ϕ è un omeomorfismo tra U_i e V_i e $G(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset U_i$. Per ogni $i = 1, \ldots, r-1$, esiste poi un intorno A_i di z in Z, tale che $F(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset V_i$. Detta A l'intersezione degli A_i, si avrà un sollevamento continuo della restrizione di F ad $A \times [0,1]$ costruita utilizzando gli omeomorfismi dagli U_i ai V_i che per l'unicità osservata sopra coincide con la restrizione di G a $A \times [0,1]$ e ciò conclude la dimostrazione.

Corollario 6 *Nelle ipotesi del precedente teorema, dati due cammini in Y aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale omotopi per una omotopia a estremi fissi, ogni due loro sollevamenti aventi stesso punto iniziale terminano nello stesso punto.*

Dim. Si sollevi l'omotopia tra i due cammini considerandola come una omotopia di faccia iniziale costante nel punto di inizio comune dei due cammini. Allora il cammino faccia finale del sollevamento è a valori nella fibra di ϕ sopra il punto finale dei cammini; essendo questa discreta tale cammino è costante.

Corollario 7 *Nelle ipotesi del precedente teorema, se V è un aperto semplicemente connesso di Y, ogni componente connessa U di $\phi^{-1}(V)$ è applicata da ϕ su V con un omeomorfismo.*

Dim. Essendo ϕ continua ed aperta (su X) basta dimostrare che $\phi : U \to V$ è biunivoca. Se $x_1, x_2 \in U$ hanno la stessa immagine y in V, si consideri un cammino da x_1 a x_2; la sua immagine in V sarà un cammino chiuso in V di origine y. Esso è omotopo al cammino costante in y perché V è semplicemente connesso. Utilizzando il corollario precedente si ottiene che $x_1 = x_2$ e quindi l'applicazione da U a V è uniettiva. Per la surgettività, dato $y \in V$, si scelgano un qualsiasi $x \in U$ ed un cammino da $\phi(x)$ a y; il sollevamento di tale cammino con origine x avrà punto finale un punto che si proietta in y.

Il teorema che segue, anche se non appare evidente a prima vista, è essenzialmente una riformulazione del teorema di de Rham.

Teorema 8 *Sia X una varietà differenziabile compatta e connessa. Allora:*
1) $H^1_{DR}(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita r
2) se $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sono 1-forme chiuse su X che inducono una base di $H^1_{DR}(X)$, il gruppo Γ dei periodi da esse determinato è un sottogruppo discreto di rango massimo (quindi r, cosicché $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r$) in $\mathbb{R}^r$ e quindi $\mathcal{T}(X) = \mathbb{R}^r/\Gamma$ è un toro di dimensione r
3) sia fissato $x_0 \in X$; esiste una ed una sola $f : (X, x_0) \to (\mathcal{T}(X), 0)$ differenziabile e tale che dette $d\theta_1, \ldots, d\theta_r$ le 1-forme chiuse su $\mathcal{T}(X)$ indotte dai differenziali $dx_1, \ldots, dx_r$ delle coordinate su $\mathbb{R}^r$, si abbia $\omega_i = f^*(d\theta_i)$ per $i = 1, \ldots, r$
4) la f del punto precedente classifica le classi di omotopia di X nei quozienti di $\mathbb{R}^m$ per sottogruppi discreti nel senso seguente:
se $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ è un sottogruppo discreto, la composizione con f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\{$omomorfismi differenziabili di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta\}$ e l'insieme $[(X, x_0), (\mathbb{R}^m/\Delta, 0)]$ delle classi di omotopia di applicazioni differenziabili di (X, x_0) in $(\mathbb{R}^m/\Delta, 0)$

Dim. Il punto 1) è un corollario del teorema di de Rham visto prima.
Alla applicazione bilineare $H^1(X) \times \Pi \to \mathbb{R}$ definita da $(\omega, \gamma) \to \int_\gamma \omega$ è associato un omomorfismo $\sigma : \Pi \to Hom(H^1(X), \mathbb{R})$; utilizzando su $Hom(H^1(X), \mathbb{R})$ la base duale di quella indotta da $\omega_1, \ldots, \omega_r$ su $H^1(X)$, l'immagine di σ diviene precisamente il sottogruppo dei periodi Γ associato alle ω_i. Utilizzando il teorema di de Rham, ci si riduce quindi a studiare l'immagine del gruppo fondamentale Π nell'omomorfismo naturale:

$$\Pi \to Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

Se Π' è l'abelianizzato di Π, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\sigma} & Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ è chiaramente un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è abeliano.
Analogamente se Π'' è il quoziente di Π' modulo il sottogruppo di torsione, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \Pi'' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi'', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ' è un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è privo di torsione. In definitiva si può supporre che Π sia abeliano senza torsione ed essendo inoltre finitamente generato esso sarà isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ per qualche intero m; dovrà essere necessariamente $m = r$ perché $Hom(\Pi, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^r$. E' poi evidente che l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z}^r \to Hom(Hom(\mathbb{Z}^r, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ è l'inclusione $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r$ e ciò dimostra il punto 2).

Per la 3) si costruisce la f applicando un $x \in X$ nel vettore avente per componenti gli integrali delle ω_i su un qualsiasi cammino da x_0 ad x: riducendo modulo Γ tale applicazione diviene ben definita e verifica ovviamente le condizioni richieste.

Dimostriamo la 4):
surgettività: sia $g : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ differenziabile ove Δ è un sottogruppo discreto in $\mathbb{R}^m$. Dette $y_1, \ldots y_m$ le coordinate su $\mathbb{R}^m$, poniamo $\alpha_i = g^*(dy_i)$ per $i = 1, \ldots, m$. Per l'ipotesi fatta sulle ω_i, esisteranno delle relazioni:

$$\alpha_i = \sum_j c_{ij}\omega_j + df_i$$

ove alla matrice C fatta con i c_{ij} è associata una applicazione lineare di $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}^m$ che applica Γ entro Δ e quindi definisce un omomorfismo (differenziabile) $\beta : \mathcal{T}(X) \to \mathbb{R}^m/\Delta$. Resta da dimostrare che $\beta \circ f$ è omotopa a g. L'omotopia viene realizzata integrando le m 1-forme:

$$\sum_i c_{ij}\omega_j + tdf_i$$

per $t \in [0, 1]$ e $i = 1, \ldots, m$.
iniettività: se $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ sono omotope, allora per ogni $i = 1, \ldots, m$ le forme $g_1^* dy_i$ e $g_2^* dy_i$ individuano la stessa classe di coomologia su X perché, hanno gli stessi periodi su ogni elemento $\gamma \in \Pi$ essendo questi eguali ai periodi di dy_i su $g_{1*}(\gamma)$ e su $g_{2*}(\gamma)$. Quindi a meno di differenziali esatti esse sono espresse dalla stessa combinazione lineare delle ω_j e i coefficienti di tali combinazioni sono appunto quelli che determinano l'omomorfismo di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta$ che composto con f dà una applicazione omotopa alle g_i ; tali omomorfismi sono quindi univocamente determinati dalla classe di omotopia delle loro composizioni con f.

Altri problemi affrontati con tecniche coomologiche

Il problema che studieremo ora sarà affrontato con tecniche simili a quelle utilizzate sia per la questione dell'esistenza di una equazione globale per una ipersuperficie che per il teorema di de Rham: si introduce un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ dello spazio X in questione fatto di aperti sui quali il problema è risolubile. Fissate soluzioni su tali U_i si valuta su ogni $U_i \cap U_j$ non vuoto "quanto" esse differiscono. Si cerca quindi se è possibile cambiare le soluzioni sugli U_i in modo che tali differenze scompaiano. Questa procedura richiede che il "quanto" le soluzioni su U_i e su U_j differiscono su $U_i \cap U_j$ sia dato da un elemento di un gruppo, meglio se abeliano; questo gruppo era $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nel caso dell'equazione globale ed $\mathbb{R}$ per il teorema di de Rham. Nel problema che esamineremo ora il gruppo sarà $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ per i vari $n \in \mathbb{N}$. Per problemi più complicati, il gruppo in cui si valutano le differenze può dipendere dagli aperti (U_i o $U_i \cap U_j$...) e la "bontà" del ricoprimento può non essere quella che utilizziamo qui ma va riferita a tali "coefficienti variabili" (teoria dei fasci).

Siano X uno spazio topologico connesso ed $f : X \to \mathbb{C}^*$ una funzione continua a valori complessi non nulli. Ci chiediamo per n intero positivo se tale f ha una radice $n-$esima ossia una funzione continua $g : X \to \mathbb{C}^*$ per la quale $g^n = f$.

Quanto segue rimarrà inalterato se X è una varietà differenziabile ed f è differenziabile come pure la g che cerchiamo.

Sia $\sigma : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ la funzione $z \mapsto \sigma(z) = z^n$; essa è localmente invertibile (come applicazione differenziabile) e quindi ogni $x \in X$ ha un intorno aperto sul quale una tale radice esiste. Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento fatto di di aperti non vuoti di X sufficientemente piccoli di modo che esista per ogni $i \in I$ una $g_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ continua tale che g_i^n sia la restrizione di f ad U_i. Se U_i è connesso tale g_i è univocamente determinata a meno di moltiplicazioni per un elemento del gruppo G delle radici $n-$esime dell'unità che è isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Supponiamo che anche le intersezioni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ siano connesse quando non vuote; allora su ogni tale U_{ij} il rapporto $g_j/g_i = c_{ij}$ è un elemento di G. Le g_i definiscono una funzione globale su X se e solo se tutte le c_{ij} sono nulle. In generale ciò non accadrà. Proviamo allora a cambiare la scelta delle g_i : ciò equivale a scegliere una $c_i \in G$ per ogni $i \in I$ e cambiare g_i in $c_i \cdot g_i$. Le nuove radici si incolleranno in una radice globale se e solo se per ogni $i, j \in I$ con $U_{ij} \neq \emptyset$ si ha $c_i/c_j = c_{ij}$. Il problema diviene quindi un problema combinatorio nel senso che sono rilevanti solo i dati seguenti:

- l'insieme I degli indici del ricoprimento
- le coppie $i, j \subset I$ per le quali $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

dati che definiscono un grafo. Inoltre:

- le costanti c_{ij} che indicano la "variazione" nel passare dal vertice i ad un suo contiguo j

Si cerca una "funzione globale" $i \mapsto c_i$ sui vertici del grafo che realizzi le variazioni assegnate. Si noti che se una terna $(i, j, k) \in I^3$ è tale che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ allora, calcolando i rapporti delle g_i in un punto di tale intersezione si ottiene la relazione $c_{ij} + c_{jk} = c_k$ e ciò assicura la risolubilità del problema (cioè l'esistenza della funzione sui vertici) sul "triangolo" di vertici ijk. Nei dati rilevanti del problema abbiamo quindi anche:

- le terne $i, j, k \subset I$ per le quali $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$

Si può pensare quindi di aggiungere al grafo precedente i "triangoli" corrispondeti a tali terne ed il problema diviene così impostato su una "superficie" (con "singolarità") che è un analogo $2-$dimensinale di un grafo. Si ha inoltre l'ipotesi che i dati c_{ij} verifichino le relazioni scritte sopra; ossia:

- $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$ se i, j, k sono vertici di un triangolo della superficie.

Analogamente a quanto fatto per la ricerca di una primitiva per una forma chiusa su una varietà, ad ogni cammino "formale" sulla superficie, fatto da una successione finita di vertici uno contiguo all'altro, si può associare una variazione totale sommando tutte le c_{ij} che si incontrano ed ottenere così un omomorfismo $\Pi \to G$ del gruppo fondamentale ("formale") Π della superficie nel gruppo delle "variazioni" G. Le costanti c_i desiderate esistono se e solo se tale omomorfismo è nullo. Se gli aperti del ricoprimento $\mathcal{U}$ sono anche $1-$connessi ossia connessi per archi e semplicemente connessi, allora il gruppo fondamentale di X coincide col gruppo "formale" della superficie che abbiamo introdotto. Si ottiene quindi il seguente:

Teorema 9 *Sia X uno spazio topologico connesso che possiede ricoprimenti arbitrariamente fini fatti di aperti $1-$ connessi ed in cui l'intersezione di due qualsiasi è vuota o connessa (ad esempio sia X una varietà differenziabile).*

Se $Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (0)$ ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{C}^*$ possiede una radice $n-$esima

In modo totalmente analogo:

Teorema 10 *Se X possiede ricoprimenti come nel teorema precedente e se $Hom(\pi_1(X, x_0), \mathbb{Z}) = (0)$ allora ogni $f : X \to \mathbb{C}^*$ continua ha un "logaritmo" ossia esiste una $g : X \to \mathbb{C}^*$ continua tale che $f = e^{2\pi i g}$.*

Nota. Il problema precedente poteva essere trattato, forse in modo più semplice, utilizzando la teoria dei rivestimenti nel modo seguente.
Si consideri $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definita da $\phi(z) = z^n$ che è un rivestimento ad n fogli. Scelto $1 \in \mathbb{C}^*$ come punto base si ha $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \simeq \mathbb{Z}$ e l'omomorfismo ϕ_* associato tra i gruppi fondamentali è la moltiplicazione per n. Dalla teoria dei rivestimenti si ha che una applicazione $f : X \to \mathbb{C}^*$ continua con X connesso per archi e con un punto base x_0 fissato è sollevabile tramite ϕ, ossia esiste $g : X \to \mathbb{C}^*$ continua tale che $f = \phi \circ g$ se e solo se l'immagine di g_* è contenuta nell'immagine di ϕ_*. Se ne deduce facilmente che tale condizione è certamente verificata se $Hom(\pi_1(X, x_0), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (0)$ e si ha così un'altra dimostrazione del teorema di sopra. Il metodo seguito in precedenza anche se può sembrare più complicato ha diversi vantaggi. Può essere applicato in casi di "coefficienti variabili" . Per uno spazio non localmente "buono", considerando per ogni suo ricoprimento aperto invarianti sulla superficie combinatoria associata sopra e studiando come questi variano raffinando il ricoprimento, si possono costruire invarianti algebrici per lo spazio che classificano problemi geometricamente definiti su esso. Ed infine esso è generalizzabile, senza un grande aumento del formalismo, a trattare casi in cui si hanno "variazioni" delle soluzioni non sulla intersezione di due ma di un numero $p \in \mathbb{N}$ di aperti del ricoprimento. Ciò viene fatto negli analoghi del teorema di de Rham per forme di grado superiore, o nello studio della banalità di fibrati. Ad esempio l'analogo di questo formalismo per $p = 3$ può essere utilizzato per dimostrare che ogni ipersuperficie di codimensione due in $\mathbb{R}^N$ ha equazioni globali se e solo se è orientata.

Appendice sul teorema di Whitney

Sia X una varietà differenziabile compatta di dimensione n. Abbiamo visto che essa ha un embedding in qualche $\mathbb{R}^N$. Si può essere più precisi:

Teorema 11 *Ogni varietà compatta di dimensione n ha un embedding in* $\mathbb{R}^{2n+1}$

Dim. Si può supporre $X \subset \mathbb{R}^N$ per qualche intero N. Sia S la sfera unitaria in $\mathbb{R}^N$; per $s \in S$ sia $p_s : X \to \mathbb{R}^{N-1}$ la proiezione ortogonale di X su $s^\perp \simeq \mathbb{R}^{N-1}$ ossia l'applicazione $x \mapsto x - < x, s > s$. Affinché essa sia un emmbedding è necessario e sufficiente che siano verificate le due seguenti condizioni:
1. p_s è iniettiva
2. p_s è infinitesimalmente ossia ha differenziale iniettivo in ogni punto//

Per trovare s che soddisfa 1. si consideri l'applicazione $\phi : X \times X - \Delta \to S$ che associa ad una coppia di (x_1, x_2) di X non sulla diagonale Δ il normalizzato del vettore $x_1 - x_2$; ossia $\phi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)/||x_1 - x_2||$. Dal teorema di Sard i valori regolari per ϕ sono densi in S ; d'altra parte se $N > 2n + 1$ i valori regolari costituiscono il complementare dell'immagine di ϕ. Quindi per "quasi tutti" gli $s \in S$ la 1. è verificata.
Perchè sia soddisfatta la 2. , occorre e basta che il vettore s non appartenga ad alcun spazio tangente di X; infatti in nucleo del differenziale della proiezione ortogonale (da $\mathbb{R}^N$ su $s^\perp$) lungo la direzione s è costituito dai multipli di s. Consideriamo quindi $ST(X) = \{(x, v) \in T(X) \; : \; ||v|| = 1\}$ (*fibrato tangente unitario*) e l'applicazione ψ di esso in S definita da $(x, v) \mapsto v$. Essendo $ST(X)$ una varietà di dimensione $2n-1$, se $N > 2N$ i valori regolari di tale applicazione costituiscono il complementare dell'immagine. Quindi se $N > 2n+1$ quasi tutte

le proiezioni su un $\mathbb{R}^{N-1}$ verificano 1. e 2. e danno quindi un embedding di X . Ciò conclude chiaramente la dimostrazione.

Nota. Nella dimostrazione del presedente teorema abbiamo avuto bisogno della forma forte del teorema di Sard, ossia del fatto che i valori regolari non solo sono un denso nel codominio ma hanno misura di Lebesgue zero; altrimenti non avremmo potuto concludere che la loro intersezione è ancora un insieme denso. Tale conclusione sarebbe però stata corretta se essi oltre che densi fossero stato aperti il che non è detto per il primo di essi. Si può però osservare che l'insieme dei punti critici di ψ (ossia la sua immagine) è chiuso perchè $ST(X)$ è compatta e che la chiusura dell'insieme dei punti critici di ϕ (ossia la sua immagine) è ottenuta aggiungendogli l'immagine di ψ (lo si dimostri per esercizio). Si può così utilizzare la forma debole del teorema di Sard, ossia che i valori regolari sono un insieme denso, la quale non fa ricorso alla nozione di misura di Lebesgue.

Appendice sui sottogruppi discreti di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Esso possiede diversi prodotti scalari definiti positivi ma le norme a loro associati sono tutte equivalenti e quindi la topologia che inducono su V è intrinsecamente definita. Un sottogruppo $G \subset V$ è datto *discreto* se è fatto di punti isolati; perché ciò accada è sufficiente che 0 sia un punto isolato in G.

Teorema 12 *Esistono vettori $e_1, ..., e_p$ linearmente indipendenti in V tali che $G = \mathbb{Z} \cdot e_1 + ... + \mathbb{Z} \cdot e_p$*

Dim. Sia $(0) = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_p$ di sottospazi vettoriali di V tali che $dim(H_r) = r$, $G_r = H_r \cap G \neq H_{r+1} \cap G$ per $r = 0, ..., p$ e $G_p = G$; una tale successione può essere costruita aggiungendo ogni volta ad H_r un elemento di G che non gli appartiene; l'ultimo di tali spazi vettoriali conterrà tutto G. Mostreremo ora che i vettori $e_1, ..., e_p$ dell'enunciato possono essere costruiti di modo che $e_1, ..., e_r$ siano generatori di G_r per $r = 0, ..., p$. La costruzione di e_1 dovrebbe essere ben nota: si tratta di dimostrare che un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}$ se non nullo consiste dei multipli interi di un numero diverso da zero. Supponiamo di aver già costruito $e_1, ..., e_r$ che sia una base di H_r e un sistema di generatori di G_r. Se $r < p$ si scelga $g \in G_{r+1} - G_r$; allora $e_1, ..., e_r, g$ è una base di H_{r+1}. Con tale base possiamo leggere H_{r+1} come $\mathbb{R}^{r+1}$ e G_r diviene $\mathbb{Z}^r \times (0)$, g il vettore $(0, 0, ..., 1)$ e $G_{r+1} = \Gamma$ un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^{r+1}$. Sia $p : R^{r+1} \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'ultima componente e mostriamo che $p(\Gamma)$ è discreto in $\mathbb{R}$. Sarà sufficiente dimostrare che $[0, 1] \cap p(\Gamma)$ è finito. Infatti se $\gamma = (x_1, ..., x_{r+1}) \in \Gamma$, dette $\bar{x}_i, ..., \bar{x}_r$ le parti intere di $x_1, ..., x_r$, si ha che $(x_i - \bar{x}_i, ..., x_r - \bar{x}_r, x_{r+1})$ appartiene a $\Gamma \cap [0, 1]^{r+1} = D$. Ne segue che $p(\Gamma) \cap [0, 1] = p(D)$ che è finito perché D è finito essendo Γ discreto. Basta allora scegliere e_{r+1} di modo che la sua immagine per p generi $p(\Gamma)$.

Appendice sulla struttura dei gruppi abeliani finitamente generati (non di programma)

Sia R un campo di integrità ad ideali principali (ad esempio $R = \mathbb{Z}$ oppure, se k è un corpo, $R = k$ oppure $R = k[x]$ oppure $R = k[x, x^{-1}]$ (che è detto anello dei polinomi di Laurent in una variabile a coefficienti in k). Definiamo:
– $u \in R$ è una *unità* se è invertibile (ossia esiste $v \in R$ tale che $uv = 1$)
– $R^* = \{$unità di $R\}$
– $a \prec b$ se esiste $x \in R$ tale che $a \cdot x = b$; (diremo che a *divide* b e scriveremo anche $a \mid b$)
– $a \sim b$ se esiste $\epsilon \in R^*$ tale che $a \cdot \epsilon = b$ (diremo che a e b sono *associati*)
– $|R| = R/\sim$ e $a \to |a|$ la proiezione canonica $R \to |R|$ (evidentemente $|R|$ è parzialmente ordinato da $\prec$ e $|0| = \{0\}$ è il massimo e $|1| = \{R^*\}$ il minimo in $|R|$
– $a \in R$ è detto *irriducibile* se $|a|$ è minimale in $|R| - \{|1|\}$.

Lemma 13 *Ogni $a \in R - R^*$ è il prodotto di un numero finito di irriducibili.*

Dim. Ogni anello a ideali principali è noetheriano e l'enunciato del lemma è valido in ogni anello noetheriano ; anzi vale, per la stessa ragione, anche il seguente :

Lemma 14 *Ogni $\Delta \subset |R|$ possiede elementi minimali.*

Sia M un modulo libero. Diremo che $x \in M$ è *primitivo* se $\lambda y = x$ con $\lambda \in R$ e $y \in M \Rightarrow \lambda \in R^*$. Poniamo $\mathbb{P}(M)$ ={primitivi di M }/azione di R^* .

Lemma 15 *Ogni $x \in M - \{0\}$ si scrive $x = \lambda\bar{x}$ ove $\bar{x}$ è primitivo. Se anche $x = \lambda'\bar{x}'$ con $\bar{x}'$ primitivo, si ha $|\lambda| = |\lambda'|$: esso sarà detto il contenuto $|x|$ di x. Chiaramente anche $\bar{x} \in \mathbb{P}(M)$ è univocamente determinato.*
Si hanno quindi applicazioni :
$M - \{0\} \ni x \to |x| \in |R|$ *e* $M - \{0\} \ni x \to \bar{x} \in \mathbb{P}(M)$.

Teorema 16 *Ogni sottomodulo di un modulo libero è libero.*

Dim. Sia fissato un buon ordinamento di una base $(e_i)_{i \in I}$ di M. Poniamo per $i \in I$:
$N_i = N \cap$ modulo generato dagli $ej, j \leq i$
$\tilde{N}_i = N \cap$ modulo generato dagli $e_j, j < i$.
Allora $N_i/\tilde{N}_i \simeq$ ideale generato in R dai coefficienti in e_i degli $x \in N_i = R \cdot d$. Scegliamo $h_i \in N_i$ con coefficiente d rispetto a e_i se $d \neq 0$ e niente se $d = 0$. Allora gli h_i così costruiti costituicono una base di N.

Lemma 17 *Sia M libero ; allora $x \in M$ fa parte di una base di M se e solo se $|x| = |1|$.*

Dim. Se $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ e $|x| = 1$, esistono $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R$ con $\alpha_1a_1 + \cdots + \alpha_na_n = 1$. Sia $\sigma : M \to R \cdot x$ definita da :

$$\sigma(\sum_1^n b_ie_i) = (\sum_1^n \alpha_ib_i) \cdot x$$

Questo è un proiettore . La successione :

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{\sigma} R \cdot x \to 0$$

ove $M' = Ker(\sigma)$ spezza perchè M è libero e quindi $M \simeq M' \oplus R \cdot x$. Essendo $M' \subset M$, esso è libero ; una base di M' unita ad x dà quindi una base di M.

Teorema 18 (Divisori elementari) *Sia M un modulo libero e $H \subset M$ un sottomodulo finitamente generato . Esistono un fattore diretto K di M , una sua base finita $e_1, \cdots, e_r$ ed una successione $n_1, \cdots, n_r \in R$ nella quale ogni n_i divide il successivo e tali che $n_1 e_1, \cdots, n_r e_r$ siano una base di H.*

Dim. Siano $n_1 \in R$ tale che $|n_1|$ è minimale in $\{|x| : x \in H\}$ e $h \in H$ con $|h| = |n_1|$. Allora $h = n_1 e_1$ con e_1 facente parte di una base di M . Sia f la proiezione di M su $R \cdot e_i$ associata ad una tale base. Allora $f(H) =$\{multipli di $n_1 e_1$\} . Infatti sia de_1 il generatore di $f(H)$ e sia $k \in H$ con $f(H) = de_1$; allora $d|n_1$ perchè $n_1 e_1 \in f(H)$. Ora $|k|$ divide n_1 = prima componente di k cosicchè $|k|$ divide n_1 ; per la minimalità di n_1 si ha quindi $|k| = |d| = |n_1|$ e quindi $f(H) =$ multipli di $n_1 e_1$. Ora $H \simeq R \cdot n_1 \oplus H_1$ ove $H_1 = Ker(f) \cap H$. Si noti che n_1 divide il contenuto di h e divide n_1 ; per la minimalità di n_1 quindi il contenuto di $h + n_1 e_1$ è associato ad n_1 che quindi divide $|h|$.
Si può ora iterare la costruzione fatta sopra partendo dalla coppia
$H_1 \subset M_1 = Ker(f)$ e ottenere una successione $d_1 H_1, d_2 H_2, \cdots$ di sottomoduli indipendenti in H che dovrà terminare per questioni di noetherianità e la dimostrazione è conclusa.

Corollario 19 *Se M è libero finitamente generato , H è un sottomodulo e M/H è senza torsione , allora M/H è libero finito ed H è un fattore diretto.*

Corollario 20 *Un gruppo abeliano A finitamente generato e senza torsione è isomorfo a qualche $\mathbb{Z}^n$*

Dim. Siano $a_1, ..., a_n$ un sistema di generatori di A e detto $\phi : M = \mathbb{Z}^n \to A$ l'omomorfismo $\phi(x_1, ..., x_n) = x_1 a_1 + ... + x_n a_n$ sia $H \subset M$ il suo nucleo. Allora $A \simeq M/H$ e quanto asserito è conseguenza del corollario precedente