Un criterio metrico di surgettività

(F.Lazzeri; Pisa, giugno 2001)

Siano X uno spazio topologico ed Ω un intorno della diagonale in $X \times X$. Una applicazione $f : X \to Y$ di X in un insieme Y è detta $\Omega-$*iniettiva* se per ogni $a, b \in X$ con $f(a) = f(b)$ si ha $(a, b) \in \Omega$. Se X è metrico, chiameremo *spessore* di $f : X \to Y$ l'estremo superiore $s(f)$ dei diametri delle fibre di f ossia:

$$s(f) = sup\{d(a,b) \ : \ a, b \in X \ , \ f(a) = f(b)\}$$

Evidentemente se X è anche compatto, per ogni intorno Ω della diagonale in $X \times X$ esiste una costante $r > 0$ tale che ogni applicazione $f : X \to Y$ avente spessore inferiore ad r è $\Omega-$iniettiva.

Lemma 1 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi metrici con X compatto. Per ogni costante $r > s(f)$ esiste un $\delta > 0$ tale che ogni applicazione $g : X \to Y$ con $d(f, g) < \delta$ ha spessore inferiore ad r.*

Dim. Sia $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ l'applicazione $(f \times f)(a, b) = (f(a), f(b))$. Scelto $c \in \mathbb{R}$ con $s(f) < c < r$ consideriamo $M = \{(a, b) \in X \times X \ : \ d(a, b) \geq c\}$. L'immagine di M in $Y \times Y$ è un compatto ed è disgiunto dalla diagonale che è un chiuso; tali insiemi hanno quindi una distanza h strettamente positiva.
Sia $\delta > 0$ inferiore alla metà di h ; se $(a, b) \in M$ si ha:

$$d(g(a), g(b)) \geq d(f(a), f(b)) - d(g(a), f(a)) - d(f(b), g(b)) > 0$$

e quindi g ha spessore al più c.

Lemma 2 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi metrici con X compatto e siano s e Z rispettivamente lo spessore e l'immagine di tale f. Allora per ogni applicazione $g : Z \to X$ tale che $f \circ g$ sia l'identità su Z e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per $a, b \in Z$ e $d(a, b) < \delta$ si ha $d(g(a), g(b)) < s + \epsilon$.*

Dim. Altrimenti esisterebbero succesioni (a_n) e (b_n) in Z con $d(a_n, b_n)$ che tende a zero e $d(g(a_n), g(b_n)) > s+\epsilon$. Passando a sottosuccessioni, $g(a_n)$ e $g(b_n)$ convergerebbero rispettivamente a certi $x, y \in X$ ed avremmo $d(x, y) > s + \epsilon$. D'altra parte per la continuità di f si avrebbe che $a_n = f(g(a_n))$ converge ad $f(x)$ e $b_n = f(g(b_n))$ converge ad $f(y)$; necessariamente quindi $f(x) = f(y)$ perché $d(a_n, b_n)$ tende a zero e quindi $d(x, y)$ deve essere al più eguale allo spessore s di f.

Teorema 3 *Sia X una varietà differenziabile connessa e compatta su cui sia fissata una una metrica compatibile con la topologia. Esiste un numero reale positivo $r(X)$ tale che ogni applicazione continua $f : X \to Y$ di spessore inferiore ad $r(X)$ in una una varietà differenziabile Y connessa di dimensione al più quella di X sia una equivalenza di omotopia. In particolare una tale Y sarà necessariamente compatta della stessa dimensione di X ed f sarà surgettiva*

Dim. Supponiamo che X sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ e sia $\epsilon > 0$ il diametro di un suo intorno tubolare. Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua di spessore inferiore ad r ; possiamo supporre che Y sia chiusa in $\mathbb{R}^M$. Utilizzando un intorno tubolare (eventualmente di raggio non costante) di Y , si dimostra facilmente che esiste un $\delta > 0$ tale che ogni $\tilde{f} : X \to Y$ che ha distanza da f minore di δ è omotopa ad f . Uilizzando il lemma 1 si può supporre quindi che la f iniziale sia simpliciale rispetto a triangolazioni di X ed Y e conseguentemente che l'immagine Z di f sia un sottoisieme simpliciale. Inoltre per il lemma 2, utilizzando eventualmente suddivisioni baricentriche, si può supporre che la triangolazione di Y sia così fine che per $a, b \in X$ tali che $f(a)$ ed $f(b)$ siano contigue si abbia $d(a, b) < r$. Definiamo allora una $g : Z \to X$ scegliendo una inversa di f sullo $0-$scheletro, estendendo a Z linearmente come applicazione in $\mathbb{R}^N$ e proiettando quindi su X con la retrazione dell'intorno tubolare. Si avrà che la composizione $g \circ f$ di X in se dista meno di r dall'identità i_X su X ed è quindi ad essa omotopa (una omotopia tra esse si ottiene componendo l'omotopia $\lambda(g\circ f)+(1-\lambda)i_X$ con la retrazione dell'intorno tubolare di X). Passando agli omomorfismi indotti in omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\cdot\mathbb{Z}$ se ne deduce che g_* :$\mathrm{H}(Z) \to \mathrm{H}(X)$ è non nullo, quindi che $\mathrm{H}(Z) \neq (0)$ e per conseguenza che $Y = Z$ è una varietà compatta ossia f deve essere surgettiva. Per ottenere che f è una equivalenza di omotopia, basta verificare che $f \circ g$ è omotopa all'identità i_Y su Y. Tale applicazione è l'identità sullo $0-$scheletro; se la triangolazione di Y è stata scelta sufficientemente fine, la distanza tra $f \circ g$ e i_Y è piccola e siccome Y è una varietà compatta ciò comporta che esse siano omotope.

Il caso della circonferenza. Possiamo estendere l'analisi ad altre situazioni del tipo del teorema precedente nel caso particolarmente semplice che X sia la circonferenza S^1 di raggio uno; necessariamente dovremo avere anche $Y = S^1$. Una $f : S^1 \to S^1$ induce una applicazione tra i rivestimenti universali $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\phi(x+1) = \phi(x)+p$ ove p è il grado di f. Supponiamo che non sia mai $\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2} = \chi(x) \in \mathbb{Z}$ ossia che punti diametralmente opposti in S^1 non possano avere la stessa immagine o equivalentemente che lo spessore di f sia inferiore a due. Per un $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha quindi:

$$(*) \qquad n < \chi(x) < n + 1$$

Si ha inoltre:

$$\chi(x + \frac{1}{2}) = \phi(x + \frac{1}{2}) - \phi(x + 1) = \phi(x + \frac{1}{2}) - \phi(x) - p = -\chi(x) - p$$

e quindi:

$$(**) \qquad n < -\chi(x) - p < n + 1$$

che sommata alla $(*)$ da $2n < -p < 2n + 2$ e quindi che p è dispari. In particolare f è surgettiva ed anche ϕ lo è.

Sia ora $f : S^1 \to S^1$ tale che se $f(x) = f(y)$ allora x, y stanno entro un terzo di cerchio. Si consideri come sopra $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\phi(x + 1) = \phi(x) + p$ ove p è il grado di f . Allora $\phi(x + t) - \phi(x) \notin \mathbb{Z}$ per $t \in [1/3, 2/3]$. Quindi esiste $n \in \mathbb{Z}$ con $n < \phi(x+1/3)-\phi(x) < n+1$ e $n < \phi(x+2/3)-\phi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ quindi anche calcolando in $x+1/3$; si ottiene:$n < \phi(x+2/3)-\phi(x+1/3) < n+1$. Posto

$a = \phi(x)$, $b = \phi(x+1/3)$ e $c = \phi(x+2/3)$ si ha $b-a$, $c-a$, $c-b \in [n, n+1]$. Quindi $b - c = (b - a) - (c - a)$ deve avere modulo uno ed appartenendo ad $[n, n+1]$: se ne deduce $n = 0$ oppure $n = -1$ e quindi il grado $p = 2n+1$ di f vale 1 o -1 che è un caso particolare del teorema precedente.

Siano ancora $f : S^1 \to S^1$ continua di grado p e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione da essa indotta verificante quindi $\phi(x+1) = \phi(x) + p$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Supponiamo che per $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [m/(2m+1), (m+1)/(2m+1)]$ si abbia $\phi(x+t) \neq \phi(x)$ (quindi per m alto la f può avere spessore molto vicino a due). In particolare si ha quindi $\phi(x+1/2) - \phi(x) \notin \mathbb{Z}$ e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n < \phi(x+1/2) - \phi(x) < n+1$ e $p = 2n+1$. Si ha allora:

$$n < \phi(x + m/(2m+1)) - \phi(x) < n+1$$

$$n < \phi(x + (m+1)/(2m+1)) < n+1$$

Ponendo $a_i = \phi(x + m/(2m+1))$ per $i = 0, ..., m-1$ si ha che

$a_m - a_0$, $a_{m+1} - a_1$, ..., $a_{2m} - a_m$ e $a_m + 1 - a_0$, $a_{m+2} - a_1$, ..., $a - 2m - a_{m-1}$

sono $2m+1$ punti in $[n, n+1]$ e la somma dei primi $m+1$ meno la somma dei restanti m è nulla. Ne segue che $-(m+1) < n < m$ e quindi che $p = 2n+1$ ha modulo inferiore a $2m+1$.

Il caso di sfere di dimensione superiore. Estenderemo solo in parte i precedenti risultati alle sfere di dimensione superiore. Precisamente si ha:

Teorema 4 *Sia $f : S^n \to S^n$ continua e tale che per ogni $x \in S^n$ si abbia $f(x) \neq f(-x)$; equivalentemente supponiamo che f abbia spessore inferiore a 2. Allora f ha grado dispari*

Dim. Si può deformare f ad una g che verifica $g(-x) = -g(x)$ per ogni $x \in S^n$ nel modo seguente: sia $\theta(x)$ l'angolo tra $f(x)$ ed $f(-x)$; per ipotesi esso è non nullo. Se $\theta(x) \neq \pi$ e quindi $f(x)$ ed $f(-x)$ generano un piano H, si ruotino tali vettori nel piano H a velocità angolare costante in modo tale che alla fine (ossia per il valore del parametro 1) $f(x)$ sia portato nel normalizzato di $f(x) - f(-x)$ e contemporaneamente $f(-x)$ arrivi nel normalizzato di $f(-x) - f(x)$; se invece $f(x)$ ed $f(-x)$ sono opposti li teniamo fermi.
Tale g ha necessariamente grado dispari; infatti essa induce una applicazione continua tra i proiettivi associati che induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali perchè il suo sollevamento ai rivestimenti universali, che è f , scambia effettivamente i fogli.

Un teorema di surgettività su $\mathbb{R}^n$

Il teorema precedente nel caso di applicazioni tra due copie di S^n che conservano punti base può essere letto tramite la proiezione stereografica come un teorema per una applicazione tra due copie di R^n:

Teorema 5 *Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ propria e tale che esistono $A, B \in \mathbb{R}$ con $0 < A < 1$, tali che per $x, y \in \mathbb{R}^n$ si abbia $||x - y|| \leq A||x|| + B$ se $\phi(x) = \phi(y)$. Allora ϕ è surgettiva (ha grado dispari)*

Dim. Sia S la sfera di centro 0 in $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ e raggio r e sia $N = (r, 0) \in S$. Proiettando dal punto N sul fattore $\mathbb{R}^n$ si ha un diffeomorfismo σ tra $S - \{N\}$ ed $\mathbb{R}^n$. La mappa antipodale su S , letta tramite σ induce una involuzione τ di $R^n - \{0\}$ in se. Con un facile calcolo si trova:

$$\tau(x) = -\frac{r^2}{||x||^2} \cdot x$$

che viene detta l'*inversione* sulla sfera di centro 0 e raggio r in $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo ora che x, y siano punti di $\mathbb{R}^n$ con $\phi(x) = \phi(y)$; per ipotesi allora $||x - y|| \leq A||x|| + B$. Se r è scelto in modo tale che per $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ sia:

$$A||x|| + B < ||x|| \cdot (1 + \frac{r^2}{||x||^2})$$

allora non potrà essere $y = \tau(x)$ ossia la ϕ letta sulla sfera S tramite la proiezione stereografica con una applicazione che fissa N, verifica la condizione del precedente teorema e quindi è surgettiva avendo grado dispari e la stessa cosa sarà vera per la ϕ. Un tale r può essere facilmente trovato e ciò conclude la dimostrazione.