

Il candidato risolva i tre problemi proposti, motivando le proprie risposte.

1. Il numero di reti segnate in ogni partita dal centravanti di una certa squadra di calcio può essere modellizzato con una v.a. di Poisson di media 1.

- (a) Qual è la probabilità che dopo due partite abbia segnato almeno 3 reti? (si suppone che il numero di reti segnate nella prima partita sia indipendente da quello della seconda)
- (b) Il presidente della squadra di calcio promette al centravanti un premio partita extra pari a 1000 euro per ogni partita in cui segnerà almeno 2 reti. Dopo 20 partite, quale sarà in media la somma guadagnata grazie ai premi extra?
- (c) Si supponga che il rendimento del giocatore cambi a seconda che la partita sia giocata in casa o meno. In particolare, si supponga che il giocatore abbia una media di un goal per ogni partita giocata in casa e di un goal ogni due partite giocate fuori e che vi siano 10 partite giocate in casa e 10 fuori. Si risponda alla domanda precedente in questo caso.

2. Un punto scelto a caso nell'intervallo  $(0, 2)$  divide l'intervallo in due segmenti. Sia  $R$  l'area del rettangolo costruito con i due segmenti.

- (a) Calcolare la probabilità che  $R$  sia minore o uguale di  $\frac{3}{4}$ .
- (b) Calcolare la media di  $R$ .

3. Sia  $X$  una v.a. con densità

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

- (a) Verificare che  $X$  ha speranza e varianza finite e calcolarle.
- (b) Sia  $(X_n)_{n \geq 1}$  una successione di v.a. indipendenti, aventi tutte densità  $f$ . Calcolare, per  $n$  grande, la quantità

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}\right)$$

- (c) Posto  $Y_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n}$ , calcolare, sempre per  $n$  grande, la quantità  $P(Y_n \leq 8)$ .

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del VI appello - 10/9/2004

1. Sia  $X$  il numero di reti messe a segno in un'unica partita: ricordando che la media di una v.a. di Poisson coincide con il suo parametro, possiamo affermare che  $X$  ha legge di Poisson di parametro 1, quindi  $P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ .

- (a) Denotiamo con  $X_1$  e  $X_2$  il numero di reti segnate rispettivamente nella prima e nella seconda partita: dobbiamo calcolare  $P(X_1 + X_2 \geq 3)$ .

Possiamo scrivere  $P(X_1 + X_2 \geq 3) = 1 - P(X_1 + X_2 \leq 2)$  dove

$$P(X_1 + X_2 \leq 2) = P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 + X_2 = 1) + P(X_1 + X_2 = 2).$$

Per poter calcolare questa quantità si può osservare che  $X_1$  e  $X_2$  sono v.a. di Poisson di parametro 1 e indipendenti, quindi  $X_1 + X_2$  è una v.a. di Poisson di parametro 2. Dunque  $P(X_1 + X_2 = 0) = e^{-2}$ ,  $P(X_1 + X_2 = 1) = 2e^{-2}$ ,  $P(X_1 + X_2 = 2) = 2e^{-2}$ . Alternativamente possiamo fare i calcoli espliciti, sfruttando l'indipendenza di  $X_1$  e  $X_2$ :

$$P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = e^{-1}e^{-1}$$

$$P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1}$$

$$P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 0, X_2 = 2) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) = \frac{e^{-1}}{2}e^{-1} + e^{-1}e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}e^{-1}.$$

$$\text{Quindi } P(X_1 + X_2 \geq 3) = 1 - 5e^{-2} = 0.32.$$

- (b) Denotiamo con  $X_i$  il numero di reti segnate durante la  $i$ -esima partita ( $i = 1, \dots, 20$ ) e con  $Y_i$  la v.a. bernoulliana che vale 1 se  $X_i \geq 2$  e 0 altrimenti. Dato che ogni  $X_i$  ha legge di Poisson di parametro 1, avremo  $p = P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 2) = 1 - P(X_i = 0) - P(X_i = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} = 0.2642$ . Se indichiamo con  $N = Y_1 + \dots + Y_{20}$  il numero di partite in cui il giocatore ha segnato almeno 2 goals, il guadagno sarà dato da  $G = 1000N$ . Dunque, grazie alla linearità della speranza, il guadagno medio sarà

$$E[G] = 1000E[N] = 1000(E[Y_1] + \dots + E[Y_{20}]) = 1000 \cdot 20 \cdot p = 5284$$

- (c) In modo analogo al punto precedente denotiamo con  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$  il numero di reti segnate nelle partite giocate in casa e con  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, 10$  il numero di reti segnate nelle partite giocate fuori casa. Le  $X_i$  hanno legge di Poisson di parametro 1. Per quanto riguarda  $V_j$ , sappiamo che hanno tutte la stessa legge di Poisson, quindi che  $E[V_1] = E[V_2]$  e inoltre che  $E[V_1 + V_2] = 1$ , da cui ricaviamo che il parametro della legge di Poisson in questo caso è  $\frac{1}{2}$ . Definiamo  $Y_i$  come nel punto precedente e, in modo analogo, sia  $Z_j$  la v.a. che vale 1 se  $V_j \geq 2$  e 0 altrimenti. Si ha  $p_1 = P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 2) = 0.2642$  e  $p_2 = P(Z_j = 1) = P(V_j \geq 2) = 1 - P(V_j = 0) - P(V_j = 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} = 0.0902$ . Posto  $N_1 = Y_1 + \dots + Y_{10}$  e  $N_2 = Z_1 + \dots + Z_{10}$ , il guadagno sarà dato da  $G = 1000(N_1 + N_2)$ . Quindi

$$E[G] = 1000E[N_1 + N_2] = 1000\left(\sum_{i=1}^{10} E[Y_i] + \sum_{j=1}^{10} E[Z_j]\right) = 10000(p_1 + p_2) = 3544.$$

2. Sia  $X$  la distanza tra 0 e il punto scelto a caso.  $X$  è una v.a. uniforme sull'intervallo  $(0, 2)$ , quindi la sua densità  $f$  e funzione di ripartizione  $F$  sono date rispettivamente da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

I segmenti hanno lunghezza  $X$  e  $2 - X$ , quindi  $R = X(2 - X) = 2X - X^2$ .

(a)  $P(R \leq \frac{3}{4}) = P(2X - X^2 \leq \frac{3}{4}) = P(X^2 - 2X + \frac{3}{4} \geq 0)$ .

Dato che la disequazione di secondo grado  $x^2 - 2x + \frac{3}{4} \geq 0$  ha soluzione  $x \leq \frac{1}{2}$  o  $x \geq \frac{3}{2}$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} P\left(R \leq \frac{3}{4}\right) &= P\left(\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{X \geq \frac{3}{2}\right\}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(X \geq \frac{3}{2}\right) \\ &= F\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (b) La media di  $R$  è data da  $E[R] = E[2X - X^2] = 2E[X] - E[X^2]$ . Osserviamo prima di tutto che sia  $X$  che  $X^2$  hanno speranza finita dato che  $X$  ha densità limitata su un intervallo limitato. Dato che  $X$  ha legge uniforme su  $(0, 2)$ , la sua media sarà 1. Ciò può essere anche verificato calcolando esplicitamente:

$$E[X] = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1.$$

Inoltre:

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Quindi  $E[R] = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ .

3. (a) Osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|x|e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}(-x)e^x dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}dx$$

e che con un opportuno cambio di variabile ( $y = -x$ ), si ha  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}(-x)e^x dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}ye^{-y}dy$ , quindi  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1 < \infty$  in quanto speranza di una v.a. con densità esponenziale di parametro 1, quindi possiamo concludere che  $X$  ha speranza finita. In particolare, dato che  $f(x)$  è una funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate),  $X$  ha legge simmetrica, quindi  $E[X] = 0$ . In modo analogo, si vede che  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = E[Y^2]$  con  $Y$  v.a. con densità esponenziale di parametro 1, quindi anche  $X^2$  ha speranza finita. In particolare  $E[X^2] = E[Y^2] = \text{Var}(Y) + E[Y]^2 = 2$ . Quindi  $\text{Var}(X) = E[X^2] = 2$ .

(b) Sia  $Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{2n}}$ . Si ha allora:

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}\right) = P(Z_n \leq 1).$$

Per il teorema del limite centrale, per  $n$  grande possiamo approssimare la funzione di ripartizione di  $Z_n$  con quella di una v.a.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq 1) = \Phi(1) = 0.841.$$

(c) Osserviamo che  $Z_n^2 = \frac{Y_n}{2}$ . Quindi  $P(Y_n \leq 8) = P(Z_n^2 \leq 4) = P(-2 \leq Z_n \leq 2)$ . Per il teorema del limite centrale, avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq 8) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(-2 \leq Z_n \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 0.954.$$