

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del V appello - 9/7/2004

Il candidato risolva i tre problemi proposti, motivando le proprie risposte.

1. In un gioco a premi, ad un concorrente viene posta una domanda con 6 possibili risposte di cui una sola esatta. Il concorrente ha 2 possibilità per rispondere e vince 200 euro se indovina al primo tentativo, 100 se indovina al secondo e ovviamente niente se non indovina. Supponiamo che il concorrente risponda a caso.
 - (a) Calcolare la probabilità che il concorrente realizzi una vincita positiva e il valore medio della vincita.
 - (b) Supponiamo ora che il concorrente, prima di rispondere alla domanda, estragga un numero X a caso compreso tra 1 e 3, e che X rappresenti il numero di possibili risposte che può dare. Nel caso in cui possa dare 3 risposte e indovini al terzo tentativo, la vincita è pari a 50 euro. Calcolare la probabilità che il concorrente guadagni esattamente 100 euro.
 - (c) Qual è il guadagno medio realizzato dal concorrente in questo caso?
2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ ax & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ b - \frac{2}{x^2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Determinare a e b in modo che F sia la funzione di ripartizione di una v.a. continua X .
- (b) Dire se X ammette speranza e varianza finite e, nel caso, calcolarle.
- (c) Poniamo

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } X \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Y è una v.a. continua? Calcolare $P(Y \leq 1/2 | X > 1/4)$.

3. Il valore delle precipitazioni medie annue in Italia, calcolato sui dati degli ultimi 9 anni, risulta pari a $\mu_0 = 893$ mm. Per quanto riguarda la sola provincia di La Spezia è stata riscontrata una media campionaria di $\bar{x} = 1051$ mm, mentre la stima della varianza è $s^2 = 32761$.
 - (a) Si effettui il test di ipotesi $H_0 : \mu \leq \mu_0$ a livello 5%. Secondo questo test, si può affermare che a Spezia piove più che nel resto d'Italia?
 - (b) Si effettui lo stesso test, ma a livello 1%. Il risultato ottenuto è coerente con quello del punto precedente? Si giustifichi opportunamente la risposta.

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del V appello - 9/7/2004

1. (a) Sia Y la v.a. che denota la vincita del concorrente. Y è una v.a. discreta che prende, con probabilità positiva, i valori 0, 100, 200. In particolare, $Y = 0$ se il concorrente sbaglia sia al primo che al secondo tentativo, quindi $P(Y = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dunque, la probabilità di realizzare una vincita positiva è data da

$$P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Per quanto riguarda il valor medio, dobbiamo calcolare $E[Y] = 0 \cdot P(Y = 0) + 100 \cdot P(Y = 100) + 200 \cdot P(Y = 200)$ (è evidente che Y avrà speranza finita dato che prende solo un numero finito di valori). $Y = 200$ se la prima risposta data è esatta, quindi $P(Y = 200) = 1/6$, mentre $Y = 100$ se la prima risposta data è sbagliata e la seconda esatta, quindi $P(Y = 100) = 5/6 \cdot 1/5 = 1/6$. Quindi

$$E[Y] = 100 \cdot \frac{1}{6} + 200 \cdot \frac{1}{6} = 50.$$

- (b) X è una v.a. con ripartizione uniforme sull'insieme $\{1, 2, 3\}$, cioè $P(X = i) = 1/3$ per $i = 1, 2, 3$. Inoltre gli eventi $(X = i), i = 1, 2, 3$ costituiscono una partizione. Sia G il guadagno realizzato in questo caso. Per la legge delle probabilità totali si ha:

$$\begin{aligned} P(G = 100) &= P(G = 100|X = 1)P(X = 1) + P(G = 100|X = 2)P(X = 2) \\ &+ P(G = 100|X = 3)P(X = 3) \end{aligned}$$

Dato che G può assumere il valore 100 solo se il concorrente fa almeno 2 tentativi, si avrà $P(G = 100|X = 1) = 0$, mentre $P(G = 100|X = 2) = P(G = 100|X = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. Quindi

$$P(G = 100) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{9}.$$

- (c) G è una v.a. discreta che assume con probabilità positiva i valori 0, 50, 100, 200 e avrà pertanto speranza finita. In modo analogo al punto precedente, calcoliamo:

$$\begin{aligned} P(G = 50) &= P(G = 50|X = 1)P(X = 1) + P(G = 50|X = 2)P(X = 2) \\ &+ P(G = 50|X = 3)P(X = 3) \\ &= \frac{1}{3} \left(0 + 0 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G = 200) &= P(G = 200|X = 1)P(X = 1) + P(G = 200|X = 2)P(X = 2) \\ &+ P(G = 200|X = 3)P(X = 3) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ne segue $E[G] = 50 \cdot \frac{1}{18} + 100 \cdot \frac{1}{9} + 200 \cdot \frac{1}{6} = \frac{425}{9} = 47.22$

2. (a) Affinché F sia funzione di ripartizione di una v.a. continua, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni: (i) $0 \leq F(x) \leq 1$, (ii) F non decrescente, (iii)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, (v) F è continua. Dalla condizione (iv), ricaviamo immediatamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} b - 2/x^2 = b = 1$. Per quanto riguarda la (v), F è evidentemente continua per $x < 0$, $0 < x < 2$ e $x > 2$ e anche in $x = 0$. Bisogna dunque solo richiedere che sia continua in $x = 2$, cioè che $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x)$, da cui si ricava l'equazione $2a = b - \frac{2}{4}$, che, insieme alla condizione $b = 1$, implica $a = 1/4$. È facile poi verificare che con i parametri $a = 1/4, b = 1$ le altre condizioni sono verificate.

(b) La densità di X sarà data da

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x^3} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

X ammette speranza finita se $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$. Sostituendo $f(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x| \frac{1}{4} dx + \int_2^{\infty} |x| \frac{4}{x^3} dx &= \int_0^2 |x| \frac{1}{4} dx + \int_2^{\infty} |x| \frac{4}{x^3} dx \\ &= \int_0^2 x \frac{1}{4} dx + \int_2^{\infty} x \frac{4}{x^3} dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{4} dx + \int_2^{\infty} \frac{4}{x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-4 \frac{1}{x} \right]_2^{\infty} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} < \infty, \end{aligned}$$

quindi X ammette speranza finita e, dato che $X \geq 0$, si avrà $E[X] = E[|X|] = 5/2$.

Per quanto riguarda la varianza, essa sarà finita se $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx < \infty$. Sostituendo $f(x)$, si ottiene

$$\int_0^2 x^2 \frac{1}{4} dx + \int_2^{\infty} x^2 \frac{4}{x^3} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx + \int_2^{\infty} \frac{4}{x} dx$$

A questo punto, basta osservare che $\int_2^{\infty} \frac{4}{x} dx = [4 \ln x]_2^{\infty} = \infty$, per poter concludere che X non avrà varianza finita.

(c) $P(Y = 0) = P(X > 1) = 1 - F(1) = 1/4 > 0$, quindi Y non è una v.a. continua. Si ha

$$P(Y \leq 1/2 | X > 1/4) = \frac{P(Y \leq 1/2, X > 1/4)}{P(X > 1/4)}.$$

$P(X > 1/4) = 1 - F(1/4) = 1/16$. Inoltre, per definizione di Y , l'evento $(Y \leq 1/2)$ si può scrivere nella forma

$$(Y \leq 1/2) = (Y \leq 1/2, X \leq 1) \cup (Y \leq 1/2, X > 1) = (X \leq 1/2) \cup (X > 1)$$

(infatti se $X \leq 1$, allora Y coincide con X , mentre se $X > 1$, allora $Y = 0$ e quindi è sempre minore di $1/2$). Ne segue che $P(Y \leq 1/2, X > 1/4) = P(X \leq 1/2, X > 1/4) + P(X > 1, X > 1/4) = P(1/4 < X \leq 1/2) + P(X > 1) = F(1/2) - F(1/4) + 1 - F(1) = 1/8 - 1/16 + 1 - 1/4 = 13/16$. Quindi $P(Y \leq 1/2 | X > 1/4) = 13/15$.

3. Il test considerato avrà regione critica della forma $D = \{T > t_{1-\alpha}(n-1)\}$ dove $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{S} = \frac{3(1051-893)}{181} = 2.62$

- (a) Per $\alpha = 0.05$, si ha $t_{0.95}(8) = 1.86$, quindi l'osservazione appartiene alla regione critica, l'ipotesi viene rifiutata e dunque si può affermare con fiducia del 95% che a Spezia piove più che nel resto d'Italia.
- (b) Per $\alpha = 0.01$, si ha $t_{0.99}(8) = 2.89 > T$. In questo caso non possiamo rifiutare l'ipotesi. Questo risultato non contraddice il risultato precedente, ma si limita ad affermare che non vi è evidenza sperimentale sufficiente a rifiutare l'ipotesi nulla con fiducia del 99%: se ammettiamo una probabilità di errore del 5% (caso(a)) allora possiamo rifiutare l'ipotesi; se però vogliamo che la probabilità di errore (di I specie) sia minore dell'1% i dati in nostro possesso non sono abbastanza significativi per poter rifiutare l'ipotesi.