

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Test di verifica - 29/03/2004

Il candidato risolva due (e solo due) problemi tra i seguenti, motivando le proprie risposte.

1. Tre amici, Andrea, Marco e Paolo, hanno una pistola a tamburo a 6 colpi, nella quale è inserita una sola pallottola. Fanno il seguente gioco: nell'ordine sopra indicato sparano ad un bersaglio (se nessuno dei tre fa partire il colpo, si ricomincia da capo). Consideriamo queste due varianti:
 - (i) prima di ogni colpo viene ruotato il tamburo della pistola
 - (ii) viene ruotato il tamburo prima che Andrea spari il primo colpo, quindi gli altri due sparano il colpo seguente (senza ruotare il tamburo).
- (a) Con quale delle due modalità è più probabile che sia Paolo a colpire il bersaglio al termine della prima prova (cioè al suo primo tiro)?
- (b) Supponiamo ora che continuino a provare, nell'ordine sopra scritto, ogni volta ruotando il tamburo, fino a che il proiettile non viene sparato: qual è la probabilità che sia Paolo quello che riesce a far partire il proiettile?
2. In un aereo bimotore, la probabilità per ogni motore di rompersi su un certo percorso è pari a $p = 0.02$, indipendentemente dall'altro motore, ma l'aereo può proseguire il suo volo anche con un solo motore.
 - (a) Qual è la probabilità che un tale aereo arrivi a destinazione?
 - (b) In un aereo quadrimotore, ogni motore ha probabilità di rompersi (sullo stesso percorso) pari a $q = 0.04$, indipendentemente dagli altri motori e l'aereo può arrivare a destinazione se almeno la metà dei suoi motori sono funzionanti. È più affidabile un bimotore o un quadrimotore?
 - (c) Supponendo che gli aerei bimotori siano in numero doppio rispetto ai quadrimotori, qual è la probabilità che si sia preso un bimotore, sapendo che l'aereo è arrivato a destinazione con esattamente metà dei suoi motori funzionanti?
3. Siano X e Y due v. a. indipendenti, aventi densità

$$p_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}; \quad p_X(-1) = P(X = -1) = \frac{1}{2};$$

$$p_Y(2) = P(Y = 2) = \frac{1}{3}; \quad p_Y(-1) = P(Y = -1) = \frac{2}{3}.$$

Posto $U = X + Y, \quad V = XY,$

- (a) calcolare $P(U < 1, V > 0)$;
- (b) calcolare $\text{Cov}(U, V)$;
- (c) dire se U e V sono due v. a. indipendenti.

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni del test di verifica - 29/03/2004

1. (a) Nel caso (i), in ogni prova ed indipendentemente dalle altre, il colpo parte con probabilità $\frac{1}{6}$: dunque Paolo colpisce il bersaglio al primo tentativo se Andrea e Marco falliscono e lui fa partire il colpo, cioè con probabilità $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^3}$.

Nel caso (ii) una sola delle sei possibili posizioni del tamburo garantisce che Paolo spari, quindi la probabilità è $\frac{1}{6}$. È dunque evidente che si ha maggiore probabilità con la seconda modalità.

- (b) Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di prove necessarie affinché venga sparato il colpo: X è una variabile geometrica di parametro $\frac{1}{6}$. È Paolo quello che riesce a far partire il proiettile se la variabile X prende i valori $3, 6, 9, \dots$ quindi la probabilità da calcolare è

$$\sum_{h=1}^{+\infty} P(X = 3h) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3h-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^2}{6^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5^3}{6^3}\right)^k$$

Ricordando che, se $|a| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$, la somma sopra indicata è eguale a

$$\frac{5^2}{6^3} \frac{1}{1 - \frac{5^3}{6^3}} = \frac{5^2}{6^3 - 5^3} = \frac{25}{91} = 0,27$$

2. (a) Il bimotore arriva a destinazione se almeno uno dei suoi motori è funzionante. Denotando con X il numero di motori rotti, si ha che $A = \{\text{il bimotore arriva a destinazione}\} = (X \leq 1)$ è complementare dell'evento $(X = 2)$ che ha probabilità $p^2 = 0.0004$ e $P(A) = 1 - p^2 = 0.9996$ (si osservi che X ha distribuzione binomiale di parametri $2, p$).

- (b) Sia Y il numero di motori rotti nel quadrimotore. Y ha distribuzione binomiale di parametri $4, q$. L'evento $\{\text{il quadrimotore arriva a destinazione}\}$ coincide con l'evento $(Y \leq 2)$ che ha probabilità:

$$P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 3) - P(Y = 4) = 1 - \binom{4}{3} (0.04)^3 (1 - 0.04) - \binom{4}{4} (0.04)^4 = 0.9997$$

quindi il quadrimotore è più affidabile.

- (c) Sia B l'evento $\{\text{si è preso un bimotore}\}$ e $C = B^c = \{\text{si è preso un quadrimotore}\}$. $P(B) = 2P(C)$ quindi $P(B) = 2/3$ e $P(C) = 1/3$. Detto $D = \{\text{esattamente metà dei motori sono rotti}\}$, dobbiamo calcolare $P(B|D)$. Per la formula di Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)}$$

$$P(D|B) = P(X = 1) = 2p(1 - p) \text{ e } P(D|C) = P(Y = 2) = \binom{4}{2} q^2 (1 - q)^2 \text{ quindi } P(B|D) = 0.8986.$$

3. (a) Si ha $P(U < 1, V > 0) = P(U = -2, V = 1) = P(X = -1, Y = -1) = P(X = -1)P(Y = -1) = \frac{1}{3}$.

(b) Per note formule e per l'indipendenza di X e Y si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(U, V) &= \mathbf{E}[(X + Y)XY] - \mathbf{E}[X + Y]\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X^2Y] + \mathbf{E}[XY^2] - (\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y])\mathbf{E}[XY] \\ &= \mathbf{E}[X^2]\mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}^2[X]\mathbf{E}[Y] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}^2[Y] = \mathbf{Var}(X)\mathbf{E}[Y] + \mathbf{Var}(Y)\mathbf{E}[X]\end{aligned}$$

È facile vedere che $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$, e quindi risulta $\mathbf{Cov}(U, V) = 0$.

(c) U e V non sono indipendenti. Basta infatti osservare che, ad esempio, l'evento $\{U = 0, V = 2\}$ è vuoto (perchè $\{U = 0\} = \{X = 1, Y = -1\} = \{V = -1\}$) e dunque $P(U = 0, V = 2) = 0$, mentre $P(U = 0)P(V = 2) = P(X = 1, Y = -1)P(X = 1, Y = 2) = (P(X = 1))^2P(Y = -1)P(Y = 2) = 1/18 \neq 0$.