

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del II appello - 9/2/2004

Il candidato risolva al più tre problemi tra i seguenti, motivando le proprie risposte.

1. Siano X e Y due v. a. discrete aventi densità congiunta
 $P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4}$; $P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4}$; $P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2}$.
 - (a) Calcolare le densità di X e di Y .
 - (b) Calcolare la densità di $U = X + Y$.
 - (c) X e Y sono indipendenti?
 - (d) Calcolare la costante a in modo tale che risultino non correlate le v. a. U e V , con V definita da $V = X + aY$. Per tale valore di a le v.a. U e V sono anche indipendenti?
2. Tizio per andare al lavoro effettua un tratto in auto fino alla fermata dell'autobus e poi prosegue in autobus fino al lavoro. Il tempo necessario a compiere il percorso in auto è una v.a. normale di media 20 minuti e deviazione standard 4 minuti. Il tempo rimanente è ancora una v.a. normale, ma con media 33 min. e deviazione standard 5 min. Si suppone che i due tempi siano indipendenti (e che non vi sia ulteriore tempo d'attesa tra i due percorsi).
 - (a) Tizio deve essere al lavoro alle 8:30. Se parte da casa alle 7:30, qual è la probabilità che sia in ritardo?
 - (b) Una volta arrivato alla fermata dell'autobus, Tizio può scegliere di proseguire in macchina: in questo caso il tempo necessario a compiere il restante percorso è una v.a. normale di media 30 min. e deviazione standard 10min. Supponendo sempre l'indipendenza dei tempi di percorso, quale sarebbe con questa scelta la probabilità di arrivare in orario? Qual è la scelta più conveniente?
 - (c) Tizio decide di fare la sua scelta una volta arrivato alla fermata dell'autobus: in quale caso gli converrebbe usare l'auto?
3.
 - (a) Si somministra un nuovo farmaco contro l'ipertensione ad un gruppo di 10 pazienti; al controllo medico che segue, 7 di essi risultano avere valori di pressione normali. Calcolare l'intervallo di fiducia bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per la percentuale di pazienti con valori normali di pressione.
 - (b) Continuando la sperimentazione, il farmaco viene somministrato ad altri 10 pazienti, e, al controllo, i pazienti con valori pressori normali risultano di nuovo 7. Calcolare l'intervallo di fiducia come nel punto (a) utilizzando il campione di 20 osservazioni così ottenute.
 - (c) Confrontare i due intervalli ottenuti. Quale dei due è più ampio? Giustificare la risposta.
4. L'astrologo Mr. Cosmo sostiene che la personalità di ogni individuo è influenzata dal suo segno zodiacale e che egli riesce ad indovinare il segno zodiacale di una persona dai suoi comportamenti con probabilità maggiore di $1/12$ (ossia la probabilità di indovinare a caso il segno zodiacale di una persona). Si sottopone Mr. Cosmo ad un test: su 100 persone, egli indovina il segno zodiacale di 10. Si può rifiutare l'ipotesi $H_0 : p \leq 1/12$ a livello 0.05?

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del II appello - 9/2/2004

1. (a) Si ha $P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4}$ e $P(X = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{4}$. Dunque $X \sim B(1, 1/4)$. Per la simmetria della densità congiunta, la stessa conclusione vale per Y .
- (b) La v. a. U prende i soli valori 0 e 1 (X e Y non possono prendere contemporaneamente il valore 1). Inoltre $P(U = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Dunque $U \sim B(1, 1/2)$.
- (c) X e Y non sono indipendenti, altrimenti la loro somma U dovrebbe avere densità $B(2, 1/4)$.
- (d) Calcoliamo $Cov(U, V)$ in funzione di a . Si ha $Cov(U, V) = Cov(X + Y, X + aY) = Var X + aVarY + (a + 1)Cov(X, Y)$. D'altra parte, per formule note, risulta $Var(X) = Var(Y) = \frac{3}{16}$; $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{1}{16}$. Dunque si tratta di risolvere l'equazione $3 + 3a - (a + 1) = 0$, che ha l'unica soluzione $a = -1$.
Per rispondere all'ultima domanda, osserviamo che $P(X + Y = 1, X - Y = 0) = 0$, mentre $P(X + Y = 1)P(X - Y = 0) = (P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1))P(X = 0, Y = 0) = 1/4 \neq 0$, quindi $X + Y$ e $X - Y$ non sono indipendenti.
2. Sia X il tempo necessario a compiere il primo tratto in auto, Y il tempo necessario a compiere il tratto in autobus: allora $X \sim \mathcal{N}(20, 16)$, $Y \sim \mathcal{N}(33, 25)$, sono indipendenti e il tempo necessario per arrivare al lavoro è $T = X + Y \sim \mathcal{N}(53, 41)$.
 - (a) La probabilità di arrivare in ritardo è
$$P(T > 60) = 1 - P(T \leq 60) = 1 - P\left(\frac{T-53}{\sqrt{41}} \leq \frac{60-53}{\sqrt{41}}\right) = 1 - \phi(1.09) = 0.14.$$
 - (b) Nel caso in cui Tizio usi l'auto, detto Z il tempo necessario per compiere il secondo tratto in auto ($Z \sim \mathcal{N}(30, 100)$) il tempo necessario per arrivare al lavoro è $V = X + Z \sim \mathcal{N}(50, 116)$, quindi $P(V < 60) = P\left(\frac{V-50}{\sqrt{116}} \leq \frac{60-50}{\sqrt{116}}\right) = \phi(0.93) = 0.82$. Dato che $P(V > 60) > P(T > 60)$, in generale conviene prendere l'autobus.
 - (c) Sia x il tempo che manca alle 8:30 quando Tizio è arrivato alla fermata dell'autobus. A Tizio converrà proseguire in auto se $P(Z < x) > P(Y < x)$, ovvero quando $P\left(\frac{Z-30}{10} \leq \frac{x-30}{10}\right) > P\left(\frac{Y-33}{5} \leq \frac{x-33}{5}\right)$, o equivalentemente quando $\phi\left(\frac{x-30}{10}\right) > \phi\left(\frac{x-33}{5}\right)$. Dato che ϕ è crescente, la disuguaglianza diventa $\frac{x-30}{10} > \frac{x-33}{5}$ da cui $x < 36$. Quindi a Tizio converrà usare l'auto se quando arriva alla fermata mancano meno di 36 minuti alle 8:30.
3. (a) Le note formule per l'intervallo bilaterale per una proporzione danno l'intervallo (0.416; 0.984).
(b) Le stesse formule danno in questo caso l'intervallo (0.499; 0.9).
(c) L'ampiezza dell'intervallo bilaterale è proporzionale alla quantità $\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$. Poiché in questo caso $\bar{X}$ non cambia ($7/10 = 14/20$) l'intervallo è più ampio se n è più piccolo, cioè per $n = 10$ (come era da aspettarsi).
4. Si tratta di un test unilatero su una proporzione. La regione critica del test è della forma $D = \{T > \phi_{1-\alpha}\}$ con $T = \sqrt{100}(\bar{p} - 1/12) / \sqrt{1/12(1 - 1/12)} = 0.6$ ($\bar{p} = 10/100$). Per $\alpha = 0.05$, si ha $\phi_{1-\alpha} = 1.64$, quindi T non appartiene alla regione critica e l'ipotesi non può essere rifiutata.