

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del I appello - 9/1/2004

Il candidato risolva al più tre problemi tra i seguenti, motivando le proprie risposte.

1. Da un mazzo di 52 carte si eseguono 3 estrazioni senza rimessa. Calcolare:
 - (a) la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso sapendo che almeno una delle carte estratte è un asso;
 - (b) la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso sapendo che esattamente una delle carte estratte è un asso;
 - (c) la probabilità che la seconda carta estratta sia un asso sapendo che sono stati estratti almeno due assi.

2. Sia X una v.a. avente densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-4|}{32} & \text{se } |x| \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare:

- (a) la funzione di ripartizione di X ;
 - (b) la speranza e la varianza di X ;
 - (c) la funzione di ripartizione e la speranza di $Y = X^2 - 4$.
3. Si ispezionano 200 alberi di una foresta, scelti in modo casuale, con lo scopo di studiare i danni provocati alla vegetazione dagli agenti inquinanti contenuti nell'aria. 110 alberi mostrano segni di danneggiamento. Per $i = 1, 2, \dots, 200$ poniamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l' } i\text{-esimo albero risulta danneggiato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Calcolare i valori della media campionaria $\bar{X}$ e della varianza campionaria S^2 .
 - (b) Calcolare, al livello $1 - \alpha = 0.95$, un intervallo di fiducia per la percentuale p di alberi danneggiati dell'intera foresta.
 - (c) Calcolare un intervallo di fiducia per la stessa percentuale al livello $1 - \alpha = 0.90$.
4. Un segnale di valore μ viene trasmesso da una sorgente A. Esso viene ricevuto da un ricevitore B, ma a causa di alcuni disturbi sulla linea di trasmissione, esso è ricevuto accompagnato da un rumore Z , che risulta essere una v. a. normale di media nulla e varianza 4. In altri termini il valore del segnale ricevuto da B è dato da $X = \mu + Z$.
 - (a) Calcolare la legge di X .

Per ridurre il rumore, il segnale viene inviato per 5 volte; denotiamo con $X_1, X_2, \dots, X_5$ i valori ricevuti da B. La media campionaria risulta essere $\bar{x} = 9.5$.

Poiché si aveva motivo di supporre che il valore μ inviato dovesse essere 8, si effettua il test

$$H_0 : \mu = 8, \quad H_1 : \mu \neq 8.$$

- (b) Qual è il risultato del test al livello $\alpha = 0.05$?
 - (c) Qual è il risultato del test al livello $\alpha = 0.1$?

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del I appello - 9/1/2004

1. Definiamo gli eventi $A_i = \{ \text{la } i\text{-esima carta estratta è un asso} \}$ per $i = 1, 2, 3$; $B = \{ \text{almeno una delle carte estratte è un asso} \}$; $C = \{ \text{esattamente una delle carte estratte è un asso} \}$; $D = \{ \text{almeno due delle carte estratte sono assi} \}$.

Si ha allora:

- (a) $P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = 0.354$ dove $P(B|A_2) = 1$, $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{48}{52} \frac{47}{51} \frac{46}{50} = 0.217$ e $P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{4}{52} \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \frac{4}{51} = \frac{4}{52} = 0.077$.
- (b) $P(A_2|C) = \frac{P(A_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{1}{3}$ dove $P(A_2 \cap C) = P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) = \frac{48}{52} \frac{4}{51} \frac{47}{50} = 0.068$ mentre $P(C) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = 0.204$.
- (c) $P(A_2|D) = \frac{P(D|A_2)P(A_2)}{P(D)} = 0.693$. Dato che $D = B \setminus C$ e $C \subset B$, si ha $P(D) = P(B) - P(C) = 0.013$ e $P(D|A_2) = P(B|A_2) - P(C|A_2) = 1 - \frac{P(A_2 \cap C)}{P(A_2)} = 0.117$.
2. (a) Dato che $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, è evidente che $F(x) = P(X \leq x) = 0$ per $x < -4$ e $F(x) = 1$ per $x > 4$. Inoltre: per $-4 \leq x \leq -2$

$$F(x) = \frac{1}{32} \int_{-4}^x (t^2 - 4)dt = \frac{1}{32} \left(\frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3} \right);$$
 per $-2 < x \leq 2$,

$$F(x) = P(X \leq -2) + P(-2 < X \leq x) = F(-2) + \frac{1}{32} \int_{-2}^x (-t^2 + 4)dt = \frac{1}{32} \left(-\frac{x^3}{3} + 4x + 16 \right);$$
 per $2 < x \leq 4$,

$$F(x) = P(X \leq 2) + P(2 < X \leq x) = F(2) + \frac{1}{32} \int_2^x (t^2 - 4)dt = \frac{1}{32} \left(\frac{x^3}{3} - 4x + \frac{80}{3} \right).$$
 (b) $E[X] = 32^{-1} \int_{-4}^4 x|x^2 - 4|dx = 0$ in quanto integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.
 $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = 32^{-1} \int_{-4}^4 x^2|x^2 - 4|dx$ da cui segue:

$$Var(X) = \frac{1}{32} \int_{-4}^{-2} x^2(x^2 - 4)dx + \frac{1}{32} \int_{-2}^2 x^2(-x^2 + 4)dx + \frac{1}{32} \int_2^4 x^2(x^2 - 4)dx = 8$$
 (c) $G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 - 4 \leq y) = P(X^2 \leq y + 4)$, da cui segue subito che $G(y) = 0$ per $y < -4$. Per $y > -4$, si ha $G(y) = P(-\sqrt{y+4} \leq X \leq \sqrt{y+4}) = F(\sqrt{y+4}) - F(-\sqrt{y+4})$.
 Quindi per $-4 \leq y < 0$ (cioè $0 \leq \sqrt{y+4} < 2$) si ha $G(y) = \frac{1}{16} \left(4\sqrt{y+4} - \frac{(\sqrt{y+4})^3}{3} \right)$;
 per $0 \leq y < 12$ (cioè $2 \leq \sqrt{y+4} < 4$) si ha $G(y) = \frac{1}{16} \left(-4\sqrt{y+4} + \frac{(\sqrt{y+4})^3}{3} + \frac{32}{3} \right)$;
 per $y \geq 12$ (cioè $\sqrt{y+4} \geq 4$) si ha $G(y) = 1$
 Infine: $E[Y] = E[X^2] - 4 = 8 - 4 = 4$
3. (a) Si ha chiaramente $\bar{X} = 110/200 = 0.55$. Una stima della varianza è $\bar{S}^2 = \bar{X}(1 - \bar{X}) = 0.2475$. Si può alternativamente scegliere la stima corretta della varianza $S^2 = \frac{200}{199} \bar{S}^2 = 0.2487$.
- (b) Calcoliamo l'intervallo bilatero. L'intervallo di fiducia è della forma $[\bar{X} - \epsilon, \bar{X} + \epsilon]$ con $\epsilon = \phi_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$, quindi per $\alpha = 0.05$ si ha $\epsilon = 0.07$ e l'intervallo è $[0.48, 0.62]$.
- (c) Con la stessa formula di prima ma $\alpha = 0.1$, si ha $\epsilon = 0.06$ e l'intervallo è $[0.49, 0.61]$.
4. (a) X ha legge normale di media μ e varianza 4.
- (b) Si tratta di un test bilatero sulla media di un campione gaussiano con varianza nota. La regione critica è $D = \{|T| > \phi_{1-\alpha/2}\}$ con $T = \frac{\sqrt{5}(\bar{x}-8)}{2} = 1.68$. Per $\alpha = 0.05$, si ha $\phi_{1-\alpha/2} = 1.96$, quindi $\bar{x}$ non appartiene alla regione di rifiuto e pertanto non si può rigettare l'ipotesi.
- (c) Con le stesse formule di prima, per $\alpha = 0.1$ si ha $\phi_{1-\alpha/2} = 1.64$, quindi le osservazioni appartengono alla regione critica e l'ipotesi viene rigettata.