

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del V appello - 22/7/2005

Il candidato risolva i problemi proposti, motivando opportunamente le proprie risposte.

1. In un autobus diretto al capolinea vi sono 5 persone: 2 uomini, 2 donne e 1 bambino. Giunti al capolinea, i passeggeri scendono tutti, uno per volta, in ordine casuale. Sia T la posizione (nel quintetto) in cui scende la prima donna e S quella in cui scende il primo uomo.

- (a) Calcolare la densità discreta e la speranza di T .
- (b) Calcolare la densità congiunta di (T, S) .
- (c) Calcolare la probabilità che la prima donna scenda prima del primo uomo.

2. Sia X una v.a. con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^4}{x^4} & \text{per } x \geq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $a > 0$.

- (a) Calcolare $P(X > 4a | X > 2a)$. La v.a. X soddisfa la proprietà di “assenza di memoria”?
 - (b) Calcolare a in modo che X abbia speranza pari a 4.
 - (c) La v.a. X rappresenta la durata in giorni di un certo tipo di batterie. Se un certo numero di queste batterie vengono messe in funzione contemporaneamente e le rispettive durate sono tra loro indipendenti, qual è il numero minimo di batterie necessario affinché dopo 5 giorni ve ne sia almeno una funzionante con probabilità maggiore dell’80%? (si usi il valore di a trovato al punto precedente.)
3. Siano X e Y due v. a. indipendenti, aventi rispettivamente densità $\mathcal{N}(0, 1)$ e $\mathcal{N}(1, 1)$. Per ogni numero reale a , poniamo

$$f(a) = P(X < aY + 1).$$

- (a) Dire per quali valori di a risulta $f(a) \leq 0.2$.
- (b) Calcolare $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$.
- (c) Calcolare $\max_{a \in \mathbb{R}} f(a)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del V appello - 22/7/2005

1. (a) La v.a. T prende con probabilità non nulla i valori $\{1, 2, 3, 4\}$ (è chiaro che essendoci due donne a bordo, la prima donna uscirà al più tardi in quarta posizione). L'evento $(T = 1)$ coincide con l'evento $A_1 = \{\text{la prima persona ad uscire dall'autobus è una donna}\}$. Dato che ogni persona ha la stessa probabilità di uscire per prima e vi sono due donne si ha:

$$P(T = 1) = \frac{2}{5}$$

Posto, in generale $A_i = \{\text{l}'i\text{-esima persona che scende dall'autobus è una donna}\}$, l'evento $(T = 2)$ è intersezione dei due eventi (non indipendenti) A_2 e A_1^c . Dunque, per la legge delle probabilità composte, si ha

$$P(T = 2) = P(A_2 \cap A_1^c) = P(A_2|A_1^c)P(A_1^c),$$

dove $P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 2/5$ e $P(A_2|A_1^c)$ è la probabilità che dall'autobus, sul quale sono rimaste 4 persone di cui due donne, esca una donna, quindi $P(A_2|A_1^c) = 2/4$, quindi

$$P(T = 2) = \frac{2}{54} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

Ragionando in maniera analoga, si ottiene

$$P(T = 3) = P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) = P(A_3|A_2^c \cap A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} P(T = 4) &= P(A_4 \cap A_3^c \cap A_2^c \cap A_1^c) = P(A_4|A_3^c \cap A_2^c \cap A_1^c)P(A_3^c|A_2^c \cap A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c) \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Si osservi che si poteva anche ottenere l'ultima probabilità calcolata come

$$P(T = 4) = 1 - P(T = 1) - P(T = 2) - P(T = 3).$$

Per calcolare la speranza, osserviamo per cominciare che sicuramente T avrà speranza finita dato che prende solo un numero finito di valori. Quindi

$$E[T] = 1 \cdot P(T = 1) + 2 \cdot P(T = 2) + 3 \cdot P(T = 3) + 4 \cdot P(T = 4) = 2.$$

- (b) Si ponga $p(h, k) = P(T = h, S = k)$: dobbiamo calcolare questa probabilità per $h, k = 1, 2, 3, 4$. Cominciamo osservando che la prima donna e il primo uomo non possono occupare la stessa posizione, quindi sicuramente si avrà

$$p(1, 1) = p(2, 2) = p(3, 3) = p(4, 4) = 0.$$

Inoltre, dato che vi è una sola persona che non è né uomo, né donna, almeno uno dei due deve uscire al più tardi per secondo, quindi $p(3, 4) = p(4, 3) = 0$.

Infine, dato che la situazione è perfettamente simmetrica (ci sono tanti uomini quante donne) si avrà $p(h, k) = p(k, h)$, quindi sarà sufficiente calcolare $p(h, k)$ solo per $h < k$.

Cominciamo con l'evento $(T = 1, S = 2)$: si tratta dell'evento {la prima persona che esce è una donna e la seconda è un uomo}.

In maniera analoga al punto precedente, denotiamo con A_i l'evento {l' i -esima persona che esce è una donna}, con B_i l'evento { l' i -esima persona che esce è un uomo}, infine con C_i l'evento { l' i -esima persona che esce è un bambino}. È chiaro che si tratti di eventi non indipendenti e che per ogni i , gli eventi A_i, B_i, C_i sono disgiunti (e $A_i \cup B_i \cup C_i = \Omega$). Ragionando in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente si avrà:

$$p(1, 2) = P(A_1 \cap B_2) = P(B_2|A_1)P(A_1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

L'evento $(T = 1, S = 3)$ è l'evento {la prima persona che esce è una donna, la seconda non è un uomo, la terza è un uomo}, dunque

$$\begin{aligned} p(1, 3) &= P(A_1 \cap B_2^c \cap B_3) = P(B_3|B_2^c \cap A_1)P(B_2^c|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

In modo analogo, otteniamo

$$\begin{aligned} p(1, 4) &= P(A_1 \cap B_2^c \cap B_3^c \cap B_4) = P(B_4|B_3^c \cap B_2^c \cap A_1)P(B_3^c|B_2^c \cap A_1)P(B_2^c|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Nel calcolo successivo, osserviamo che se la prima persona non è né uomo, né donna, allora deve essere un bambino, quindi

$$\begin{aligned} p(2, 3) &= P(C_1 \cap A_2 \cap B_3) = P(B_3|A_2 \cap C_1)P(A_2|C_1)P(C_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2, 4) &= P(C_1 \cap A_2 \cap B_3^c \cap B_4) = P(B_4|B_3^c \cap A_2 \cap C_1)P(B_3^c|A_2 \cap C_1)P(A_2|C_1)P(C_1) \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

- (c) Dobbiamo calcolare $P(T < S)$. Per simmetria, si avrà $P(T < S) = P(S < T)$ e poiché $P(T < S) + P(S < T) = 1$ (dato che $P(T = S) = 0$), si può subito dedurre che $P(T < S) = 1/2$.

In modo alternativo, si osserva che l'evento $(T < S)$ è unione di tutti gli eventi della forma $(T = h, S = k)$ con $h < k$, eventi che sono tra loro disgiunti e hanno probabilità

$P(T = h, S = k) = p(h, k)$. Quindi, $P(T < S)$ è data dalla somma delle probabilità di tutti questi eventi:

$$P(T < S) = p(1, 2) + p(1, 3) + p(1, 4) + p(2, 3) + p(2, 4) = \frac{1}{2}.$$

2. (a) Per definizione di probabilità condizionata, si ha

$$P(X > 4a | X > 2a) = \frac{P(X > 4a, X > 2a)}{P(X > 2a)} = \frac{P(X > 4a)}{P(X > 2a)}$$

(si osservi che l'evento $(X > 4a)$ è contenuto nell'evento $(X > 2a)$, dunque l'intersezione è data dall'evento più piccolo). Usando la funzione di ripartizione assegnata, ricaviamo che

$$P(X > 4a) = 1 - F(4a) = \frac{a^4}{(4a)^4} = \frac{1}{4^4}$$

$$P(X > 2a) = 1 - F(2a) = \frac{a^4}{(2a)^4} = \frac{1}{2^4}$$

quindi

$$P(X > 4a | X > 2a) = \frac{2^4}{4^4} = \frac{1}{16}.$$

Se X avesse la proprietà di assenza di memoria, si dovrebbe avere

$$P(X > 4a | X > 2a) = P(X > 2a)$$

e questo chiaramente non vale. Quindi X non soddisfa la proprietà richiesta.

- (b) Osserviamo innanzi tutto che X è una v.a. assolutamente continua dato che la sua funzione di ripartizione è continua e derivabile in ogni punto diverso da a . Per poter calcolare la speranza di X è necessario prima calcolarne la densità. Si ha

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{4a^4}{x^5} & \text{per } x \geq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che X prende solo valori positivi, dimostrare che la speranza è finita e calcolarne il valore possono essere fatte contestualmente:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^{+\infty} x \frac{4a^4}{x^5} dx = \int_a^{+\infty} \frac{4a^4}{x^4} dx \\ &= 4a^4 \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_a^{+\infty} = \frac{4a^4}{3a^3} = \frac{4}{3} a \end{aligned}$$

quindi X ha speranza finita e $E[X] = 4$ se e solo se $a = 3$.

- (c) Supponiamo che n batterie vengano messe in funzione e siano $X_1, \dots, X_n$ le rispettive durate: si tratta di v.a. indipendenti e tutte con funzione di ripartizione F . ve ne sarà almeno una funzionante dopo 5 giorni se la durata massima è maggiore di 5. Quindi vogliamo calcolare n in modo che

$$P(\max(X_1, \dots, X_n) > 5) \geq 0.8.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} P(\max(X_1, \dots, X_n) > 5) &= 1 - P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq 5) = 1 - P(X_1 \leq 5, \dots, X_n \leq 5) \\ &= 1 - P(X_1 \leq 5) \cdots P(X_n \leq 5) = 1 - F(5)^n = 1 - \left(1 - \frac{3^4}{5^4}\right)^n \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi risolvere la disuguaglianza

$$1 - \left(1 - \frac{3^4}{5^4}\right)^n \geq 0.8$$

o equivalentemente

$$\left(1 - \frac{3^4}{5^4}\right)^n \leq 0.2,$$

che, passando ai logaritmi, diventa

$$n \log \left(1 - \frac{3^4}{5^4}\right) \leq \log 0.2,$$

cioè $n(-0.139) \leq -1.609$ da cui si ricava

$$n \geq 11.57$$

quindi il numero minimo di batterie richiesto è 12.

In maniera alternativa, è possibile definire n v.a. bernoulliane nel seguente modo

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i > 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si tratta di v.a. indipendenti dato che le X_i lo sono e di parametro $P(Y_i = 1) = P(X_i > 5) = 1 - F(5) = \left(\frac{3}{5}\right)^4$. La probabilità che almeno una delle batterie funzioni dopo 5 giorni si può esprimere come $P(Y_1 + \dots + Y_n \geq 1)$, dove la v.a. $Y_1 + \dots + Y_n$ ha legge binomiale $\mathcal{B}(n, \left(\frac{3}{5}\right)^4)$. Vogliamo determinare n in modo che:

$$P(Y_1 + \dots + Y_n \geq 1) \geq 0.8$$

o equivalentemente $P(Y_1 + \dots + Y_n = 0) \leq 0.2$, ritroviamo la disuguaglianza

$$\left(1 - \frac{3^4}{5^4}\right)^n \leq 0.2$$

che abbiamo risolto prima.

3. Si ha $f(a) = P(X - aY < 1)$. Per noti risultati di teoria, la v.a. $-aY$ ha densità $\mathcal{N}(-a, a^2)$ ed è indipendente da X , dunque $X - aY$ ha densità $\mathcal{N}(-a, a^2 + 1)$. Quindi, la v.a.

$$Z = \frac{X - aY + a}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

ha densità $\mathcal{N}(0, 1)$. Dunque si trova

$$f(a) = P(X - aY < 1) = P\left(Z < \frac{1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) = \Phi\left(\frac{1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right).$$

- (a) La relazione

$$\Phi\left(\frac{1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) \leq 0.2$$

è soddisfatta se e solo se

$$\frac{1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq \phi_{0.2} = -0.84$$

(per trovare $\phi_{0.2}$, si osservi che per le proprietà dei quantili della $\mathcal{N}(0, 1)$, si ha $\phi_\alpha = -\phi_{1-\alpha}$, quindi $\phi_{0.2} = -\phi_{0.8}$); a sua volta è equivalente a $a + 1 \leq -0.84\sqrt{a^2 + 1}$, ovvero, elevando al quadrato, al sistema

$$\begin{cases} 0.2944a^2 + 2a + 0.2944 \geq 0 \\ a < -1 \end{cases}$$

che, come si verifica facilmente, ha le soluzioni $a \leq -6.64$.

- (b) Per semplicità, nel seguito porremo

$$g(a) = \frac{1 + a}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

e quindi si può scrivere $f = \Phi \circ g$.

Per la continuità della funzione Φ risulta

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \Phi \circ g(a) = \Phi\left(\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a)\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

- (c) Poiché Φ è crescente, si avrà

$$\max_{a \in R} f(a) = \max_{a \in R} \Phi \circ g(a) = \Phi\left(\max_{a \in R} g(a)\right)$$

Per calcolare $\max_{a \in R} g(a)$ è opportuno eseguire lo studio della funzione g : si vede che g assume il suo massimo in $a = 1$ e quindi $\max_{a \in R} g(a) = \sqrt{2}$. Ne segue allora

$$\max_{a \in R} f(a) = \Phi(\sqrt{2}) = 0.9207.$$