

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2004/05

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del III appello - 8/6/2005

Il candidato risolva i problemi proposti, motivando opportunamente le proprie risposte.

1. Si considerino due v. a. indipendenti X e Y , tali che

$$p_X(0) = p_X(1) = \frac{1}{2}; \quad p_Y(0) = \frac{1}{4}, p_Y(1) = \frac{3}{4}.$$

Posto $Z = \min(X, Y)$, $U = XZ$, calcolare

- (a) la densità di Z ;
- (b) la densità di U ;
- (c) la $Cov(X, Z)$.
- (d) X e Z sono indipendenti?

2. Si considerino due v. a. indipendenti e assolutamente continue X e Y , tali che

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Posto $Z = -\max\{\log X, \log Y\}$, calcolare

- (a) la funzione di ripartizione di Z ;
- (b) la densità di Z ; si tratta di una densità nota?

3. Un certo tipo di lampadina ha una durata aleatoria avente legge esponenziale di parametro $\lambda(\text{ore}^{-1})$. Si vuole effettuare il test

$$H_0 : \lambda \leq 10^{-2}; \quad H_1 : \lambda > 10^{-2}.$$

Per fare questo, si decide di disporre in parallelo n lampadine del tipo precedente, e di respingere l'ipotesi nulla se la durata T del sistema in parallelo così formato è inferiore a 100 ore.

- (a) Qual è la statistica usata in questo test? Calcolarne la legge (in funzione di λ).
- (b) Qual è la regione critica del test?
- (c) Qual è il minimo numero di lampadine da utilizzare per effettuare il test, se si vuole che esso permetta di respingere H_0 al livello $\alpha = 0.05$?

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del III appello - 8/6/2005

1. (a) La v. a. Z prende i valori 0 e 1. Inoltre

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(Z = 0) = 1 - P(Z = 1) = \frac{5}{8}.$$

- (b) Anche la v. a. U prende i valori 0 e 1. Inoltre

$$P(U = 1) = P(X = 1, Z = 1) = P(Z = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(U = 0) = 1 - P(U = 1) = \frac{5}{8}.$$

- (c) Si ha

$$\text{Cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = E[U] - E[X]E[Z] = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}.$$

- (d) Le v.a. X e Z non sono indipendenti, poiché la loro covarianza è diversa da 0.

2. (a) Osserviamo prima di tutto che X e Y sono a valori nell'intervallo $(0,1)$, e quindi i loro logaritmi sono negativi. Pertanto la v. a. Z è positiva, e questo implica che, per $t \leq 0$, si ha $P(Z \leq t) = 0$. Per $t \geq 0$ si ha invece,

$$\begin{aligned} P(Z \leq t) &= P(-\max\{\log X, \log Y\} \leq t) = P(\max\{\log X, \log Y\} \geq -t) \\ &= 1 - P(\max\{\log X, \log Y\} \leq -t) \end{aligned}$$

e per l'indipendenza di X e Y ,

$$\begin{aligned} P(Z \geq t) &= P(\max\{\log X, \log Y\} \leq -t) = P(\log X \leq -t, \log Y \leq -t) \\ &= P(\log X \leq -t)P(\log Y \leq -t) = P(X \leq e^{-t})P(Y \leq e^{-t}) \end{aligned}$$

(In modo alternativo, si può osservare che

$$-\max\{\log X, \log Y\} = \min\{-\log X, -\log Y\}$$

o anche

$$-\max\{\log X, \log Y\} = -\log(\max(X, Y)).$$

Ora, per $t \geq 0$, si ha $0 \leq e^{-t} \leq 1$ e quindi

$$P(X \leq e^{-t}) = F_X(e^{-t}) = \int_0^{e^{-t}} f_X(x) dx = \int_0^{e^{-t}} 1 dx = e^{-t}$$

$$P(Y \leq e^{-t}) = F_Y(e^{-t}) = \int_0^{e^{-t}} f_Y(y) dy = \int_0^{e^{-t}} 2y dy = 2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{e^{-t}} = e^{-2t}$$

Dunque $P(Z \geq t) = e^{-t}e^{-2t} = e^{-3t}$ e

$$P(Z \leq t) = 1 - P(Z \geq t) = 1 - e^{-3t}.$$

- (b) Si riconosce che la funzione di ripartizione di Z è la funzione di ripartizione di una v.a. esponenziale di parametro 3, dunque

$$f_Z(t) = \begin{cases} 3e^{-3t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Alternativamente, derivando la funzione di ripartizione ottenuta (che è chiaramente continua e derivabile con derivata continua in ogni $t \neq 0$), si trova la densità $f_Z(t)$ e si riconosce che si tratta della densità esponenziale di parametro 3.

3. (a) La statistica usata è evidentemente la durata T del sistema in parallelo. Indicando con $X_1, X_2, \dots, X_n$ le durate delle n lampadine, si ha $T = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Supponendo indipendenti tali durate, per ogni $t \geq 0$, risulta

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n. \end{aligned}$$

mentre chiaramente per $t < 0$ si ha $P(T \leq t) = 0$.

- (b) La regione critica del test è l'evento $\{T \leq 100\}$.

- (c) Deve essere $\alpha^* = \sup_{\lambda \leq 10^{-2}} P^\lambda(T \leq 100) \leq 0.05$; per il punto (a) si ha

$$\sup_{\lambda \leq 10^{-2}} P^\lambda(T \leq 100) = \sup_{\lambda \leq 10^{-2}} (1 - e^{-100\lambda})^n = (1 - e^{-1})^n$$

(perchè la funzione $g(\lambda) = (1 - e^{-100\lambda})^n$ è crescente).

Dunque si deve risolvere rispetto a n la disequaglianza

$$(1 - e^{-1})^n \leq 0.05$$

e cioè

$$n \log(1 - e^{-1}) \leq \log 0.05,$$

da cui (si ricordi che $\log(1 - e^{-1}) \leq 0$)

$$n \geq \frac{\log 0.05}{\log(1 - e^{-1})} = 6.52.$$

Si devono impiegare quindi almeno 7 lampadine.