

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Test di verifica - 31/05/2005

Il candidato risolva due (e solo due) problemi tra i seguenti, motivando le proprie risposte.

1. Una sbarra metallica di lunghezza 1 metro viene spezzata in un punto P , scelto a caso su di essa. Ciò significa che, se si rappresenta la sbarra con il segmento $[0, 1]$ della retta reale, l'ascissa X di P è una v. a. avente densità uniforme in $[0, 1]$. Si ottengono così due sbarrette, lunghe X e $1 - X$ (metri) rispettivamente.

(a) Calcolare la funzione di ripartizione della v. a.

$$Y = \frac{1 - X}{X}$$

(b) Dire se Y ammette densità e, nel caso, calcolarla.

(c) Successivamente, la sbarretta lunga X metri viene spezzata a metà; calcolare la probabilità che con le tre sbarrette così ottenute si possa costruire un triangolo (di lati $X/2$, $X/2$ e $1 - X$, dunque necessariamente isoscele).

2. Per illuminare una stanza si utilizza un certo tipo di lampadina, avente durata esponenziale di media 100 ore. Ogni volta che una lampadina si guasta, essa viene immediatamente sostituita con un'altra, identica. Si suppongono trascurabili i tempi necessari per le sostituzioni (e fra loro indipendenti le durate delle diverse lampadine).

(a) Calcolare il parametro della legge esponenziale considerata e la varianza del tempo di vita di una generica lampadina.

(b) Qual è la probabilità che, utilizzando 50 lampadine, la stanza sia illuminata per almeno 3000 ore e non più di 6000?

(c) Quante lampadine si dovranno utilizzare affinché la stanza sia illuminata per non meno di 5000 ore con una probabilità di almeno 0.95?

3. Una ditta che fabbrica batterie vuole controllare la qualità della sua produzione. In un campione di 100 batterie esaminate, la durata è risultata in media di 150 ore. Si suppone che la durata di una generica batteria sia una v.a. X avente legge normale di varianza nota $\sigma^2 = 625 \text{ ore}^2$.

(a) Calcolare un intervallo di fiducia bilaterale di livello 0.95 per la media μ di X .

(b) Con quale livello di fiducia si può affermare che $147(\text{ore}) \leq \mu \leq 153(\text{ore})$?

(c) Volendo stimare μ al livello 0.95 con un errore di ± 2 ore, quante batterie devono ora essere esaminate?

1. (a) Poiché $0 \leq X \leq 1$, la v. a. Y è non negativa. Quindi, per $t < 0$ si ha intanto $P(Y \leq t) = 0$. Per $t \geq 0$, dato che $X \geq 0$, risulta

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(1 - X \leq tX) = P\left(X \geq \frac{1}{1+t}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq \frac{1}{1+t}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{1+t}\right) \end{aligned}$$

Ricordando che la funzione di ripartizione di una v.a. uniforme sull'intervallo $[0,1]$ è data da $F_X = x$ per $x \in [0, 1]$, 0 altrimenti, e osservando che per $t > 0$ si ha $0 \leq 1/(1+t) \leq 1$, e quindi $F_X(1/(1+t)) = 1/(1+t)$, si ottiene:

$$F_Y(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

- (b) La funzione di ripartizione di Y è continua e derivabile con continuità in ogni $t \neq 0$, quindi Y ammette densità. La densità g di Y si ottiene derivando per $t \neq 0$ la funzione di ripartizione ottenuta nel punto precedente, e definendo arbitrariamente $g(0)$ (ad esempio ponendo $g(0) = 0$). Si ottiene la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ (1+t)^{-2} & \text{per } t > 0. \end{cases}$$

- (c) Immaginiamo di avere fatto la costruzione richiesta. Affinché le sbarrette costituiscano i lati di un triangolo, è necessario che per ogni coppia di sbarrette scelte, la somma delle loro lunghezze sia maggiore della lunghezza della restante. Si deve dunque avere:

$$\frac{X}{2} + 1 - X \geq \frac{X}{2} \qquad \frac{X}{2} + \frac{X}{2} \geq 1 - X$$

da cui seguono le due condizioni

$$X \leq 1 \qquad X \geq \frac{1}{2}.$$

La probabilità richiesta è allora $P(1/2 \leq X \leq 1) = P(X \geq 1/2)$ (dove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che $P(X \leq 1) = 1$.) e quindi la probabilità che le tre sbarrette siano i lati di un triangolo è $P(X \geq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Alternativamente, sia 2α l'angolo al vertice del triangolo. Allora si ha $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ e quindi $0 \leq \sin \alpha \leq 1$. Dalla relazione

$$\sin \alpha = \frac{(1 - X)/2}{X/2} = \frac{1 - X}{X}$$

si ricava allora

$$0 \leq \frac{1 - X}{X} \leq 1$$

ovvero $1 \geq X \geq 1/2$ e, come sopra, si ricava che la probabilità di questo evento è $1/2$.

In alternativa, si può osservare che $\{0 \leq \frac{1-X}{X} \leq 1\} = \{0 \leq Y \leq 1\}$, dove Y è la v. a. del punto (a), e quindi si ha $P(0 \leq Y \leq 1) = F_Y(1) - F_Y(0) = 1/2$.

2. (a) Sia X la durata di una generica lampadina e λ il parametro della legge esponenziale seguita da X . Per formule note si ha $100 = \mathbf{E}[X] = \lambda^{-1}$, $\mathbf{Var}X = \lambda^{-2}$, da cui $\lambda = 10^{-2}$ e $\mathbf{Var}X = 10^4$.
- (b) Per $i = 1, 2, \dots, 50$ sia X_i la durata dell' i -esima lampadina. Il tempo totale di illuminazione è dato evidentemente da $S_{50} = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$. Si chiede di calcolare

$$P(3000 \leq S_{50} \leq 6000),$$

cioè $P(S_{50} \leq 6000) - P(S_{50} < 3000)$. Posto $\mu = \mathbf{E}[X_i]$ e $\sigma^2 = \mathbf{Var}X_i$, dal punto precedente si ricava $\mu = 10^2$ e $\sigma^2 = 10^4$. Dato che le X_i sono indipendenti, hanno la stessa legge e media e varianza finita (e $n = 50$ è abbastanza grande) si può applicare la formula dell'approssimazione normale:

$$\begin{aligned} P(S_{50} \leq 6000) &= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq \frac{6000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} \leq 1.41\right) \simeq \Phi(1.41) = 0.921 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} P(S_{50} < 3000) &= P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} < \frac{3000 - 5000}{100\sqrt{50}}\right) = P\left(\frac{S_{50} - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}} < -2.83\right) \\ &\simeq \Phi(-2.83) = 1 - \Phi(2.83) = 1 - 0.998 = 0.002, \end{aligned}$$

da cui segue $P(3000 \leq S_{50} \leq 6000) = 0.921 - 0.002 = 0.919$.

- (c) Sia n il numero di lampadine necessarie e, per $i = 1, 2, \dots, n$ sia X_i la durata dell' i -esima lampadina. In modo analogo al punto precedente, si osserva che il tempo totale di illuminazione è dato evidentemente da $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, e si chiede che risulti

$$P(S_n \geq 5000) \geq 0.95.$$

Dalla formula dell'approssimazione normale, si ottiene

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 5000) &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{5000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(-\frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Dovrà dunque essere

$$\Phi\left(-\frac{50 - n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

e, invertendo la relazione precedente

$$-\frac{50 - n}{\sqrt{n}} \geq \phi_{0.95} = 1.64.$$

Risolvendo rispetto a $\sqrt{n}$ la disuguaglianza precedente, si ottiene $\sqrt{n} \geq 7.94$, da cui $n \geq 63.02$, e dunque $n \geq 64$ poiché n è un numero intero. Il valore trovato è maggiore di 50, dunque l'approssimazione può ritenersi soddisfacente.

3. (a) Sostituendo i valori $n = 100$, $\bar{x} = 150$, $\sigma = 25$, $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ nella formula che fornisce l'intervallo bilaterale di livello $1 - \alpha$ (caso della varianza nota), e cioè

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right)$$

si ottiene l'intervallo $150 - 2.5 \times 1.96 \leq \mu \leq 150 + 2.5 \times 1.96$, e cioè $145.1 \leq \mu \leq 154.9$.

- (b) Sottraendo membro a membro le due relazioni

$$153 = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2} = \bar{x} + 2.5\phi_{1-\alpha/2}$$

$$147 = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2} = \bar{x} - 2.5\phi_{1-\alpha/2}$$

si trova l'uguaglianza $2.5\phi_{1-\alpha/2} = 3$, e cioè $\phi_{1-\alpha/2} = 1.2$. Invertendo questa relazione, si ottiene $1 - \alpha/2 = \Phi(1.2) = 0.885$, da cui $\alpha = 0.23$. Il livello dell'intervallo è dunque $1 - \alpha = 0.77$.

- (c) In questo caso la lunghezza dell'intervallo cercato deve essere pari a 4, ovvero deve valere l'uguaglianza

$$2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2} = 4.$$

Sostituendo nella relazione precedente il valore $1 - \alpha = 0.95$, cioè $\phi_{1-\alpha/2} = \phi_{0.975} = 1.96$, si ottiene l'equazione

$$\frac{25}{\sqrt{n}} \times 1.96 = 2,$$

la cui soluzione è $\sqrt{n} = 24.5$, ovvero $n = 600.25$. Bisogna dunque controllare 601 batterie.