

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Test di verifica - 05/04/2005

Il candidato risolva due (e solo due) problemi tra i seguenti, motivando le proprie risposte.

1. Nove persone salgono su un treno formato da tre vagoni e ognuna sceglie a caso il vagone su cui salire indipendentemente dalle altre.
 - (a) Qual è la probabilità che siano tutte sullo stesso vagone?
 - (b) Qual è la probabilità che vi siano esattamente due persone nel primo vagone?
 - (c) Qual è la probabilità che non vi sia nessuno nel secondo vagone, sapendo che ci sono esattamente due persone nel primo?
2. Si lancia 3 volte una moneta non equilibrata, per la quale è $p = 0.6$ la probabilità di ottenere la faccia “testa” in un singolo lancio. Poniamo

X = numero di teste ottenute in totale

Y = numero di croci ottenute nei primi 2 lanci.

- (a) Calcolare la densità congiunta di X e Y .
 - (b) Calcolare le densità marginali di X e di Y .
 - (c) X e Y sono indipendenti?
 - (d) Calcolare $P(Y = 2 | X \geq 1)$.
3. In una data città, la popolazione delle persone in possesso della patente automobilistica è composta per il 53 % da donne e per il 47 % da uomini.

Le statistiche mostrano che il 20 % delle donne ha un incidente nell’arco di un anno, mentre la stessa percentuale per gli uomini sale al 40%.

- (a) Qual è la probabilità che un individuo (in possesso di patente) abbia avuto un incidente nel 2004?
- (b) Se un individuo ha avuto un incidente nel 2004, qual è la probabilità che si trattasse di una donna?
- (c) Tra le donne con patente, la percentuale di persone sotto i 30 anni è del 20 % e, secondo le statistiche, la percentuale di incidenti in un anno per questa categoria è del 17 %. Qual è la probabilità che una donna con più di 30 anni abbia avuto un incidente nel 2004?

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni del test di verifica - 05/04/2005

1. (a) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dove A_i è l'evento { i passeggeri scelgono tutti il vagone i }. È chiaro che i 3 eventi sono disgiunti e hanno tutti la stessa probabilità quindi è sufficiente calcolare la probabilità di uno solo di questi, ad esempio A_1 . A questo scopo, definiamo 9 v.a., ponendo $X_i = 1$ se l' i -esima persona sale sul primo vagone, 0 altrimenti per $i = 1, \dots, 9$. Si tratta di v.a. bernoulliane di parametro $p = P(X_i = 1) = 1/3$ (perchè la probabilità di scegliere uno dei vagoni è la stessa per tutti e tre) e indipendenti tra loro. La v.a. $S = X_1 + \dots + X_9$ ha legge $\mathcal{B}(9, 1/3)$ ed indica il numero di passeggeri che salgono sul vagone 1, quindi $A_1 = (S = 9)$. Ne segue che $P(A_1) = (\frac{1}{3})^9$ e $P(A) = 3P(A_1) = \frac{1}{3^8}$.
- (b) Dobbiamo calcolare $P(S = 2)$. Per quanto detto prima, risulta $P(S = 2) = \binom{9}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^7$.
- (c) Sia N il numero di persone salite sul secondo vagone. Dobbiamo calcolare $P(N = 0 | S = 2)$. Osserviamo che questo equivale a calcolare la probabilità che 7 persone (cioè tutte tranne quelle salite sul vagone 1), potendo scegliere tra due vagoni (e quindi ciascuno con prob. $1/2$), scelgano tutte il vagone 3. Quindi la probabilità da calcolare è $\frac{1}{2^7}$.

In modo alternativo, è possibile risolvere l'esercizio utilizzando gli spazi di probabilità uniformi.

Lo spazio degli esiti possibili è $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_9) : \omega_i \in \{1, 2, 3\}\}$ ($\omega_i = j$ se l' i -esima persona sceglie il vagone j).

Ciascun elemento di Ω ha la stessa probabilità, che sarà data da $\frac{1}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{3^9}$.

- (a) L'evento A del quale calcolare la probabilità è $A = \{(1, 1, \dots, 1), (2, 2, \dots, 2), (3, 3, \dots, 3)\}$ quindi ha solo 3 elementi. Ne segue che $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{3^9} = \frac{1}{3^8}$.
- (b) Sia B l'evento del quale dobbiamo calcolare la probabilità: B è unione disgiunta degli eventi $B_{jk} = \{ \text{nel vagone 1 ci sono solo le persone } j, k \} = \{(\omega_i)_{1 \leq i \leq 9} : \omega_j = \omega_k = 1, \omega_l \in \{2, 3\} \text{ se } l \neq j, k\}$. Ad esempio $B_{12} = \{(1, 1, \omega_2, \dots, \omega_9), \omega_i \in \{2, 3\} \text{ per } i = 2, \dots, 9\}$. Ogni B_{jk} ha la stessa cardinalità che è 2^7 . Inoltre ci sono tanti eventi della forma B_{jk} quanti sottoinsiemi di due elementi in $\{1, \dots, 9\}$, cioè $\binom{9}{2}$. In conclusione

$$P(B) = \binom{9}{2} \frac{2^7}{3^9}.$$

- (c) Sia C l'evento { non c'è nessuno nel secondo vagone }.

Dobbiamo calcolare $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$. Per quanto visto nel punto precedente, l'evento $C \cap B$ è unione disgiunta degli eventi $C \cap B_{jk}$, quindi $P(C \cap B) = \sum_{\{j,k\} \subset \{1,\dots,9\}} P(C \cap B_{jk})$. L'evento $C \cap B_{jk}$ è dato da :

$$C \cap B_{jk} = \{(\omega_i)_{1 \leq i \leq 9} : \omega_j = \omega_k = 1, \omega_l = 3 \text{ per } l \neq j, k\}$$

(ad esempio $C \cap B_{12} = \{(1, 1, 3, \dots, 3)\}$, quindi $\text{card } C \cap B_{jk} = 1$ e $P(C \cap B_{jk}) = \frac{1}{3^9}$. Ne segue che $P(C \cap B) = \binom{9}{2} \frac{1}{3^9}$, da cui

$$P(C|B) = \frac{\binom{9}{2} \frac{1}{3^9}}{\binom{9}{2} \frac{2^7}{3^9}} = \frac{1}{2^7}.$$

2. (a) Mettiamoci in uno schema di Bernoulli di parametri $n = 3$ e $p = 0.6$: definiamo le v.a. Z_i ponendo $Z_i = 1$ se esce testa all' i -esimo lancio, 0 altrimenti, per $i = 1, 2, 3$. Le Z_i sono v.a. bernoulliane, indipendenti di parametro $p = 0.6$. Osserviamo che $X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ mentre $Y = 2 - (Z_1 + Z_2)$.

Il vettore aleatorio (X, Y) è a valori nell'insieme $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ e si vede facilmente che

$$P(X = 0, Y = 2) = P(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 0) = (1 - p)^3 = 0.064,$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 0) + P(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0) = 2p(1-p)^2 = 0.192,$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(Z_1 = 0, Z_2 = 0, Z_3 = 1) = p(1-p)^2 = 0.096,$$

$$P(X = 2, Y = 0) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 0) = p^2(1-p) = 0.144,$$

$$P(X = 2, Y = 1) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 1) + P(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 1) = 2p^2(1-p) = 0.288,$$

$$P(X = 3, Y = 0) = P(Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 1) = p^3 = 0.216,$$

mentre $P(X = h, Y = k) = 0$ per ogni altra coppia (h, k) .

- (b) È noto dalla teoria che X ha legge binomiale $\mathcal{B}(3, 0.6)$, mentre Y ha legge binomiale $\mathcal{B}(2, 0.4)$. Alternativamente, le due densità marginali possono essere ricavate dalla congiunta per le note formule. Ad esempio, per la Y si ha

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0) \\ &= p^2(1-p) + p^3 = p^2((1-p) + p) = p^2 \end{aligned}$$

(osservando che, per quanto visto prima, $P(X = 1, Y = 0) = 0$). In modo analogo si ha:

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) \\ &= 2p(1-p)^2 + 2p^2(1-p) = 2p(1-p)((1-p) + p) = 2p(1-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2) \\ &= (1-p)^3 + p(1-p)^2 = (1-p)^2((1-p) + p) = (1-p)^2 \end{aligned}$$

come si vede, si tratta appunto della $B(2, 0.4)$.

(c) X e Y non sono indipendenti; infatti, ad esempio, $P(X = 0, Y = 0) = 0$, mentre $P(X = 0)P(Y = 0) = (1-p)^3 p^2 \neq 0$.

(d)

$$\begin{aligned} P(Y = 2 | X \geq 1) &= \frac{P(Y = 2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(Y = 2, X = 1)}{1 - P(X = 0)} \\ &= \frac{p(1-p)^2}{1 - (1-p)^3} = \frac{0.096}{0.936} = 0.103. \end{aligned}$$

3. Consideriamo gli eventi

$I = \{\text{l'individuo ha avuto un incidente nel 2004}\},$

$D = \{\text{l'individuo è una donna}\},$

$U = \{\text{l'individuo è un uomo}\}.$

Dai dati si ricava che $P(D) = 0.53$, $P(U) = 0.47$, $P(I|D) = 0.2$, $P(I|U) = 0.4$.

(a) $P(I) = P(I|D)P(D) + P(I|U)P(U) = 0.2 \times 0.53 + 0.4 \times 0.47 = 0.294$.

(b) Dobbiamo calcolare $P(D|I)$. Dalla formula di Bayes, ricaviamo che

$$P(D|I) = \frac{P(I|D)P(D)}{P(I)} = \frac{0.106}{0.294} = 0.360.$$

(c) Consideriamo gli eventi

$M = \{\text{l'individuo ha meno di 30 anni}\},$

$E = \{\text{l'individuo è una donna con meno di 30 anni}\},$

$F = \{\text{l'individuo è una donna con più di 30 anni}\}.$

Valgono allora le seguenti relazioni tra gli eventi:

$$E = D \cap M \quad F = D \cap M^c$$

da cui ricaviamo che

$$D = E \cup F \quad \text{e} \quad E \cap F = \emptyset.$$

Dai dati si ricava che $P(M|D) = 0.2$, $P(I|E) = 0.17$.

Quindi $P(E) = P(M \cap D) = P(M|D)P(D) = 0.2 \times 0.53 = 0.106$ e $P(F) = P(D) - P(E) = 0.424$. Dobbiamo calcolare $P(I|F)$. A questo scopo, osserviamo che $P(D \cap I) = P(E \cap I) + P(F \cap I)$ e quindi

$$\begin{aligned} P(F \cap I) &= P(D \cap I) - P(E \cap I) = P(I|D)P(D) - P(I|E)P(E) \\ &= 0.2 \times 0.53 - 0.17 \times 0.106 = 0.08798. \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = 0.2075.$$