

Corso di Laurea in Informatica - a.a. 2004/05

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del II appello - 9/2/2005

Il candidato risolva i problemi proposti, motivando opportunamente le proprie risposte.

1. Siano date due v.a. X e Y con densità congiunta data da:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(-1, -1) &= p_{X,Y}(-1, 0) = p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{1}{9} \\ p_{X,Y}(0, -1) &= p_{X,Y}(0, 0) = p_{X,Y}(0, 1) = \frac{1}{12} \\ p_{X,Y}(1, -1) &= \frac{5}{36} \quad p_{X,Y}(1, 0) = a \quad p_{X,Y}(1, 1) = b \end{aligned}$$

- (a) Determinare a e b in modo che Y abbia media $\frac{5}{36}$. X e Y sono indipendenti?
 - (b) Calcolare, per i valori di a e b determinati al punto (a), la densità congiunta di (U, V) , dove $U = X^2 Y^2$ e $V = X^2 + Y^2$.
 - (c) Calcolare le densità marginali di U e V .
2. Per un certo tipo di lampadina elettrica, la durata di vita (espressa in ore) è una v. a. X avente densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ axe^{-\lambda x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

dove a e λ sono due costanti strettamente positive.

- (a) È noto per precedente esperienza che la vita media di una tale lampadina è di 1.000 ore. Calcolare i valori di a e di λ .
 - (b) Calcolare $P(X < 1500 | X > 1200)$.
3. Due giocatori, A e B , decidono di fare una serie di n partite a testa e croce con una moneta equilibrata, puntando ogni volta 1 euro. Ciascuno di essi ha a disposizione un capitale di 30 euro. Ad ogni partita A punta su “testa”, e B su “crocce”. Il regolamento dei conti verrà fatto alla fine della serie degli n lanci della moneta.
- (a) Indichiamo con X il numero delle partite vinte dal giocatore A . Qual è la legge di X ?
 - (b) Esprimere per mezzo di X e di n la probabilità che il regolamento dei conti avvenga senza che nessuno dei due giocatori risulti in debito verso l'altro.
 - (c) Per $n = 400$, calcolare approssimativamente la probabilità del punto (b).
 - (d) Determinare il più piccolo valore di n tale che la probabilità del punto (b) risulti minore o uguale a 0.68.

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del II appello - 9/2/2005

1. Calcoliamo le densità marginali di X e Y . Le v.a. X e Y prendono entrambe i valori $\{-1, 0, 1\}$ con le seguenti probabilità:

$$P(X = -1) = p_{X,Y}(-1, -1) + p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0) = p_{X,Y}(0, -1) + p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = p_{X,Y}(1, -1) + p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(1, 1) = \frac{5}{36} + a + b$$

$$P(Y = -1) = p_{X,Y}(-1, -1) + p_{X,Y}(0, -1) + p_{X,Y}(1, -1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

$$P(Y = 0) = p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 0) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + a = \frac{7}{36} + a.$$

$$P(Y = 1) = p_{X,Y}(-1, 1) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + b = \frac{7}{36} + b.$$

Dalle proprietà della densità, si ottiene la condizione:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{36} + a + b = 1$$

da cui:

$$a + b = \frac{5}{18} \quad (1)$$

- (a) $E[Y] = -1 \cdot P(Y = -1) + 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) = -\frac{1}{3} + \frac{7}{36} + b$. Dalla condizione $E[Y] = 5/36$, si ricava $b = \frac{5}{18}$. Dalla condizione (1), si ricava $a = 0$.

Osserviamo che con questi valori di a e b , si ottiene $P(Y = 0) = 7/36$ e $P(Y = 1) = 17/36$.

È evidente allora che X e Y non possono essere indipendenti, dato che $p_{X,Y}(1, 0) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 0)$.

- (b) U può prendere i valori $\{0, 1\}$, mentre V a valori in $\{0, 1, 2\}$. Dato che $U = 1$ se e solo se sia X che Y sono diversi da 0 (e quindi solo se $V = 2$), si ha

$$p_{U,V}(1, 0) = p_{U,V}(1, 1) = 0$$

$$p_{U,V}(1, 2) = p_{X,Y}(-1, -1) + p_{X,Y}(1, -1) + p_{X,Y}(-1, 1) + p_{X,Y}(1, 1) = \frac{23}{36}.$$

Si può anche osservare che $p_{U,V}(1, 2) = P(X \neq 0, Y \neq 0) = 1 - P[(X = 0) \cup (Y = 0)] = 1 - [P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0)]$.

In modo analogo, dato che $V = 2$ se e solo se sia X che Y sono diversi da 0, si ha $p_{U,V}(0, 2) = 0$.

$$\text{Inoltre: } p_{U,V}(0, 0) = p_{X,Y}(0, 0) = \frac{1}{12}$$

$$p_{U,V}(0, 1) = p_{X,Y}(0, -1) + p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(1, 0) = \frac{5}{18}.$$

(c) Per quanto riguarda le densità marginali, si ha

$$P(U = 1) = p_{U,V}(1, 0) + p_{U,V}(1, 1) + p_{U,V}(1, 2) = \frac{23}{36}$$

$$P(U = 0) = 1 - P(U = 1) = \frac{13}{36}$$

$$P(V = 0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{12}$$

$$P(V = 1) = p_{U,V}(0, 1) + p_{U,V}(1, 1) = \frac{5}{18}$$

$$P(V = 2) = p_{U,V}(0, 2) + p_{U,V}(1, 2) = \frac{23}{36}.$$

2. (a) Dato che f è una densità di probabilità, avremo intanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} a x e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} a x e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{a}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{a}{\lambda^2} = 1,$$

da cui intanto si ottiene $a = \lambda^2$.

(In modo alternativo, per risolvere l'integrale, si può osservare che:

$$\int_0^{\infty} a x e^{-\lambda x} dx = \frac{a}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

dove $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x dx$ è la media di una variabile esponenziale di parametro λ , e dunque vale $1/\lambda$. Ne segue quindi che $\int_0^{\infty} a x e^{-\lambda x} dx = a/\lambda^2$.)

La relazione $\mathbf{E}[X] = 1000$ si può allora scrivere nella forma

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = 1000;$$

Integrando di nuovo per parti si trova

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \left[-\lambda x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x dx = \frac{2}{\lambda},$$

(dove di nuovo nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x dx$ è la media di una variabile esponenziale di parametro λ , e dunque vale $1/\lambda$). Si ottiene allora $\lambda = 2 \times 10^{-3}$ e $a = 4 \times 10^{-6}$.

(b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di X (con i valori di a e λ trovati nel punto precedente):

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \left[-\lambda t e^{-\lambda t} \right]_0^x + \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -\lambda x e^{-\lambda x} + 1 - e^{-\lambda x}.$$

La probabilità condizionale richiesta è uguale a

$$\frac{P(1200 < X < 1500)}{P(X > 1200)} = \frac{F(1500) - F(1200)}{1 - F(1200)}$$

D'altra parte

$$F(1200) = 1 - e^{-2.4} - 2.4 e^{-2.4} = 0.69156; \quad F(1500) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} = 0.80085,$$

e quindi

$$P(X < 1500 | X > 1200) = \frac{0.80085 - 0.69156}{1 - 0.69156} = \frac{0.10929}{0.30844} = 0.35433.$$

3. (a) Per $i = 1, 2, \dots, n$ poniamo

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la moneta dà "testa"} \\ 0 & \text{se la moneta dà "croce"} \end{cases}$$

Le v. a. Y_i sono tutte Bernoulliane di parametro $1/2$ e tra loro indipendenti, dunque $X = \sum_{i=1}^n Y_i \sim B(n, 1/2)$.

- (b) Poiché la puntata in ogni singolo lancio è di 1 euro, A vince X euro e ne perde $n - X$ (e il contrario avviene per B , naturalmente). Dunque la vincita (algebrica) di A è di $X - (n - X) = 2X - n$ euro, mentre quella di B è di $n - 2X$ euro. Perché nessuno dei due giocatori perda più del capitale disponibile, devono dunque valere le due disequazioni

$$\begin{cases} 2X - n \geq -30 \\ n - 2X \geq -30 \end{cases}$$

e cioè

$$-15 + \frac{n}{2} \leq X \leq 15 + \frac{n}{2}.$$

- (c) È chiaro che la probabilità richiesta vale 1 per $n \leq 30$, dato che la puntata ad ogni tiro è di 1 euro. Per $n > 30$ possiamo usare l'approssimazione normale, nel modo seguente (ricordiamo che la varianza di una Bernoulliana di parametro $1/2$ vale $1/4$):

$$\begin{aligned} P\left(-15 + \frac{n}{2} \leq X \leq 15 + \frac{n}{2}\right) &= P\left(\frac{-15}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n/2}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{15}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-30}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{30}{\sqrt{n}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Quindi, per $n = 400$ si ottiene il valore

$$2\Phi(1.5) - 1 = 2 \times 0.933 - 1 = 0.866.$$

- (d) Si deve risolvere la disequazione

$$2\Phi\left(\frac{30}{\sqrt{n}}\right) - 1 \leq 0.68,$$

cioè

$$\Phi\left(\frac{30}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.84.$$

Dalle tavole della legge normale si ricava $30/\sqrt{n} \leq 1$, e quindi $n \geq 900$.