

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Prova scritta del I appello - 12/1/2005

Il candidato risolva i problemi proposti, motivando opportunamente le proprie risposte.

1. Elisa, Marta e Stefano hanno scritto le letterine a Babbo Natale: Elisa e Marta hanno chiesto una bambola e una scatola di Lego a testa, mentre Stefano ha chiesto un trenino e una scatola di Lego. Nel sacco di Babbo Natale ci sono effettivamente 2 bambole, 3 scatole di Lego e un trenino, ma Babbo Natale, oramai vecchio e stanco (e anche un po' cieco) distribuisce due regali ciascuno ai bambini ma a caso.

- (a) Qual è la probabilità che i tre bambini siano accontentati (cioè che ricevano entrambi i regali che hanno richiesto)?
- (b) Qual è la probabilità che almeno uno dei tre sia accontentato?
- (c) Qual è la probabilità che tutti e tre siano accontentati almeno in parte (cioè che ciascun bambino riceva almeno uno dei regali che ha richiesto)?

2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{per } x \in [1, c] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove c è una costante positiva.

- (a) Determinare la costante c in modo che f sia una densità di probabilità.
- (b) Sia X una v.a. avente densità f (con la costante c calcolata nel punto precedente). Calcolare la densità di $T = \log X$.
- (c) Sia Y una v.a. con densità f , indipendente da X . Determinare la densità della v. a.

$$Z = \log(\max\{X, Y\}).$$

3. Nella popolazione francese, la percentuale di individui con sangue Rh^- è del 15%. In un campione rappresentativo di 200 individui Baschi francesi, si osserva che 44 persone sono Rh^- (e dunque in questo caso la percentuale è del 22%).

- (a) Si consideri il test di ipotesi nulla
 H_0 : la differenza osservata nelle due percentuali non è significativa.
Al livello $\alpha = 0.05$, H_0 deve essere accettata o respinta?
- (b) Qual è il più grande valore di α che porterebbe alla conclusione contraria rispetto a quella ottenuta nel punto (a) precedente?

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Soluzioni della prova scritta del I appello - 12/1/2005

1. (a) Definiamo i tre eventi: $A = \{ \text{Elisa riceve 1 bambola e 1 scatola di Lego} \}$, $B = \{ \text{Marta riceve 1 bambola e 1 scatola di Lego} \}$, $C = \{ \text{Stefano riceve 1 trenino e 1 scatola di Lego} \}$. Dobbiamo calcolare $P(A \cap B \cap C)$. Osserviamo che i tre eventi non sono indipendenti, quindi dobbiamo usare le probabilità condizionali:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A).$$

Per calcolare $P(A)$, osserviamo che questo equivale a calcolare la probabilità che, estraendo due regali a caso dal sacco, essi siano proprio quelli richiesti da Elisa, quindi

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{6 \cdot 5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Per calcolare $P(B|A)$, osserviamo che questo equivale a calcolare la probabilità che, estraendo due regali a caso dal sacco, nel quale ora sono rimasti 4 regali (tutti tranne quelli richiesti da Elisa che sono già stati estratti), essi siano quelli richiesti da Marta, quindi

$$P(B|A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{\frac{4 \cdot 3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Infine, essendo rimasti due soli regali nel pacco, si avrà $P(C|A \cap B) = 1$. Quindi la probabilità richiesta è:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

- (b) La probabilità da calcolare è $P(A \cup B \cup C)$ che, per il principio di inclusione-esclusione sarà data da:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Poiché se due bambini vengono accontentati, lo è automaticamente anche il terzo, è ovvio che si abbia $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 2/15$. Inoltre

$P(B) = P(A) = \frac{2}{5}$, mentre $P(C) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{\frac{6 \cdot 5}{2}} = \frac{1}{5}$. Quindi si ha:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{11}{15}.$$

- (c) Definiamo i tre eventi: $D = \{ \text{Elisa riceve 1 bambola o 1 scatola di Lego} \}$, $E = \{ \text{Marta riceve 1 bambola o 1 scatola di Lego} \}$, $F = \{ \text{Stefano riceve 1 trenino o 1 scatola di Lego} \}$. Dobbiamo calcolare $P(D \cap E \cap F)$. Ricordiamo che:

$$P(D \cap E \cap F) = 1 - P(D^c \cup E^c \cup F^c)$$

Osserviamo inoltre che D^c è l'evento $\{ \text{Elisa non riceve nè una bambola nè una scatola di Lego} \}$ e coincide pertanto con l'insieme vuoto. In modo analogo, si vede che anche $E^c = \emptyset$. Quindi $D^c \cup E^c \cup F^c = F^c$. Infine $F^c = \{ \text{Stefano non riceve nè un trenino nè una scatola di Lego} \} = \{ \text{Stefano riceve due bambole} \}$ che ha probabilità

$$P(F^c) = \frac{\binom{2}{6}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{\frac{6 \cdot 5}{2}} = \frac{1}{15}.$$

Quindi $P(D \cap E \cap F) = 1 - P(F^c) = \frac{14}{15}$.

2. (a) Dato che f è una densità di probabilità, avremo

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_1^c \frac{1}{x} dx = \log c,$$

da cui $c = e$.

- (b) Dato che f è diversa da 0 nell'intervallo $[1, e]$, si avrà $1 \leq X \leq e$, e quindi $0 \leq T \leq 1$. Questo implica che la funzione di ripartizione F di T vale 0 per $x < 0$ e vale 1 per $x > 1$. Per $0 \leq x \leq 1$ si ha $1 \leq e^x \leq e$; dunque

$$F(x) = P(T \leq x) = P(\log X \leq x) = P(X \leq e^x) = \int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt = x.$$

Derivando, si ottiene la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si riconosce quindi la densità uniforme sull'intervallo $[0, 1]$.

- (c) Di nuovo, sia X che Y assumono valori nell'intervallo $[1, e]$, dunque la stessa cosa accade per la v. a. $\max\{X, Y\}$. Pertanto Z assume valori nell'intervallo $[0, 1]$. Ciò implica (come per la v. a. T del punto precedente) che la funzione di ripartizione G di Z vale 0 per $x < 0$ e vale 1 per $x > 1$. Per $0 \leq x \leq 1$ si ha $1 \leq e^x \leq e$; dunque, per l'indipendenza di X e Y e per il punto (b) precedente si ha

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Z \leq x) = P(\max\{X, Y\} \leq e^x) = P(X \leq e^x, Y \leq e^x) = \\ &= P(X \leq e^x)P(Y \leq e^x) = x^2 \end{aligned}$$

Derivando, si ottiene la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. (a) Si deve eseguire il test bilaterale $H_0 : p = 0.15$, per il quale si fa uso della statistica

$$T = \frac{\bar{X} - 0.15}{\sqrt{0.15(1 - 0.15)}} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - 0.15}{\sqrt{0.1275}} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - 0.15}{0.357} \sqrt{n}.$$

Calcolando T per $\bar{x} = 0.22$ e $n = 200$ si trova il valore $t = 2.77$. La regione critica del test considerato è $\{|T| > \phi_{1-\alpha/2}\} = \{|T| > \phi_{0.975}\} = \{|T| > 1.96\}$.

Il valore calcolato $t = 2.77$ appartiene alla regione critica, e dunque H_0 è respinta.

- (b) Per poter accettare H_0 è necessario che si abbia $2.77 \leq \phi_{1-\alpha/2}$, e cioè $0.997 = \Phi(2.77) \leq 1 - \alpha/2$, da cui $\alpha \leq 2 \times 0.003 = 0.006$.