

Il numero e

1. Consideriamo la successione:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Se cerchiamo di calcolarne il limite, ci troviamo di fronte ad una forma di indeterminazione: 1^∞ .

3. Dimostreremo che a_n ha limite finito: a questo limite finito si dà il nome “ e ”, numero di Nepero.

4. Per dimostrare che a_n ha limite finito, faremo vedere che:

1] a_n è crescente

2] a_n è limitata (e inoltre 3 è un maggiorante per la successione)

5. Dimostriamo quindi queste due proprietà della successione a_n .

1] Dimostriamo che a_n è crescente, cioè che $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta: $a_n < a_{n+1}$

Consideriamo:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

6. Sviluppiamo a_n utilizzando la formula del binomio di Newton, che dà in generale:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

più sinteticamente:

$$7. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

8. nel nostro caso: $a = 1$, $b = 1/n$. Otteniamo quindi:

$$9. a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Possiamo scrivere:

$$10. a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

11. I fattori a numeratore sono esattamente k : per dividere il loro prodotto per n^k posso dividere ognuno dei k fattori per n .

Otterrò:

$$12. a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

A questo punto utilizzo questa espressione anche per scrivere a_{n+1} :

$$13. \quad a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Voglio concludere che a_n è crescente, cioè che $a_n < a_{n+1}$.

14. Confronto le due sommatorie (relative ad a_n e a_{n+1}):

15. - nella prima ci sono n addendi positivi, nella seconda $n+1$

16. - ogni addendo nella 1^a sommatoria, corrispondente ad un qualsiasi valore di k fra 1 e n , è formato dal prodotto di $k-1$ fattori (prescindendo da $1/k!$). Ognuno di questi k fattori della 1^a sommatoria è minore del corrispondente nella 2^a sommatoria:

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{perché} \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{e così via}$$

17. Quindi la 2^a sommatoria è maggiore della 1^a, e quindi:

$$a_n < a_{n+1}$$

che è quello che volevamo dimostrare.

18. 2] Dimostriamo ora che la successione a_n è limitata.

19. Più precisamente dimostriamo che il numero 3 è un maggiorante per la successione.

Riprendo l'espressione di a_n che avevo trovato:

$$20. \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

21. Osservo che ognuno dei fattori:

$$1 - \frac{1}{n} \quad 1 - \frac{2}{n} \quad \dots \quad 1 - \frac{k-1}{n}$$

è ottenuto togliendo a 1 una quantità positiva: quindi ogni fattore è minore di 1.

22. Allora se sostituisco ad ognuno di tali fattori il numero 1, otterrò una quantità più grande. Cioè:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

23. Posso ancora scrivere:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

24. Se ora voglio far vedere che quest'ultima espressione è minore di 3, basta che riesca a dimostrare che:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 1$$

25. Sappiamo che:

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\dots \cdot 2 \cdot 1}$$

26. Quindi, se $k > 1$ (ed effettivamente $k > 1$) possiamo scrivere:

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

27. Allora risulta:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

28. Ma ora osservo che:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

quindi posso riscrivere:

$$29. \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

In definitiva ho dimostrato che:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + 1 = 3$$

che era quello che volevo dimostrare.



Prova di comprensione del teorema

1. Quanto vale a_4 ?
2. Vai al punto 4 della dimostrazione. Perché per dimostrare che a_n ha limite finito basta far vedere che è crescente e limitata?

Era lo stesso se si faceva vedere prima che è limitata, e poi che è crescente?

3. Guarda la formula scritta al punto 7. Scrivi la formula nel caso $n=5$; scrivi quindi il termine di tale sommatoria che ottieni per $k=2$. Se $n=5$, quali valori assume l'indice k della sommatoria?
4. Vai al punto 8. Era diverso se sceglievo $a=1/n$ e $b=1$? Come sarebbe venuta in tal caso la formula scritta al punto 9?

5. Vai al punto 10. Dopo il 2° segno di uguale che passaggio è stato fatto?

E dopo il 3° segno di uguale?

6. Vai al punto 11. Perché “i fattori al numeratore sono esattamente k ”?

7. Vai al punto 12. Motiva tutti i passaggi che trovi nella formula scritta.

8. Vai al punto 13. Prova a usare l'espressione trovata per esprimere a_{n+2} .

9. Vai al punto 14. Perché per controllare se a_n è crescente basta confrontare le due sommatorie?

10. Vai al punto 15. Supponi di considerare a_{13} e a_{14} . Quanti addendi ha in questo caso la sommatoria relativa ad a_{13} ? E quella relativa ad a_{14} ?

11. Considera $n=5$. Scrivi esplicitamente l'espressione finale del punto 12 corrispondente ad a_5 e ad a_6 , e ripeti su questo caso particolare il ragionamento generale seguito nel punto 16.
12. Vai al punto 18. Cosa vuol dire che la successione a_n è limitata?
13. Vai al punto 19. Cosa vuol dire che 3 è un maggiorante per la successione?
14. Spiega bene i passaggi presenti nella formula del punto 22.
15. Spiega i passaggi della formula del punto 23.
16. Motiva l'affermazione fatta al punto 24.
17. Vai al punto 26. Perché c'è la precisazione che deve essere $k > 1$?
18. Perché allo stesso punto si dice che "effettivamente $k > 1$ "?
-
19. Perché vale la disuguaglianza scritta al punto 27?
20. Motiva i passaggi della formula scritta al punto 28.
21. Dimostra la formula scritta al punto 29.

22. Motiva tutti i passaggi della formula scritta al punto 30.

23. Motiva tutti i passaggi della formula scritta al punto 31.

24. Vai al punto 32: cos'è che si voleva dimostrare?

In conclusione

Come è andata? Ti è riuscito rispondere?

Hai trovato difficile capire il teorema? Perché?

Quando hai letto il teorema cercando di capirlo, ti sei fatto qualcuna delle domande precedenti?
Se sì, quali?

Se no, pensi che sarebbe stato opportuno farlo?

Eventuali osservazioni: