

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Analisi Matematica
Foglio di esercizi 8

A. Disegnare i grafici approssimativi delle seguenti funzioni, dopo averne determinato il più grande insieme di definizione.

$$1.f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}; \quad 2.f(x) = \frac{x|x|}{\log|x|}; \quad 3.f(x) = \arctan \frac{e^{-x}}{x}; \quad 4.f(x) = \left(\log \frac{1}{x} + \log^2 x \right)^{-1};$$

$$5.f(x) = \log \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 - \frac{x}{2}; \quad 6.f(x) = \exp \left(\frac{|x(x-1)|}{x^2 - 1} \right); \quad 7.f(x) = \arcsin |x^2 - 3x|;$$

$$8.f(x) = \log \sqrt{(1 - \sqrt[3]{x^2})^2}; \quad 9.f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}; \quad 10.f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{|x-1|}};$$

$$11.f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} + \log|x|; \quad 12.f(x) = (\cos x - |\cos x|)e^{-|x-\pi|}; \quad 13.f(x) = \sin x e^{x+|x|};$$

$$14.f(x) = e^{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}; \quad 15.f(x) = \cos(\log|x|); \quad 16.f(x) = \frac{\sqrt{x} \log x}{x-1}; \quad 17.f(x) = 1 - e^{|x-2|(x^2-1)};$$

$$18.f(x) = x e^{\frac{x}{x+1}}; \quad 19.f(x) = \frac{\log|1+x|^x}{1+x}; \quad 20.f(x) = \arctan \sqrt{\left| \frac{1-x}{1+x} \right|}; \quad 21.f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1}};$$

$$22.f(x) = \sqrt{2 \sin x - \sin^2 x - 1}; \quad 23.f(x) = |\log||1 - x^3|; \quad 24.f(x) = e^{\log(x^2-1)};$$

$$25.f(x) = \arcsin(\sin x); \quad 26.f(x) = \arctan(\tan x); \quad 27.f(x) = \frac{\log x}{1-x}; \quad 28.f(x) = \log(3x+1) - \sqrt{2x+1};$$

$$29.f(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x^2-1}}; \quad 30.f(x) = x^2 - \log(x^2 - 1); \quad 31.f(x) = \frac{x-1}{|x+1|}; \quad 32.f(x) = \frac{\sqrt{\log(x^2+1)}}{x};$$

$$33.f(x) = \sqrt{x}e^{-x}; \quad 34.f(x) = e^x \sin x; \quad 35.f(x) = e^{|x|}; \quad 36.f(x) = e^x |\sin x|;$$

$$37.f(x) = \frac{1}{e^x \sin x}; \quad 38.f(x) = \log|\log x|; \quad 39.f(x) = x \log x; \quad 40.f(x) = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-1}};$$

$$41.f(x) = \frac{1 + \log x}{x}; \quad 42.f(x) = x\sqrt{1-x^2}; \quad 43.f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}; \quad 44.f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4};$$

$$45.f(x) = x \arctan \frac{1}{x}; \quad 46.f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}; \quad 47.f(x) = \frac{\log x - x^2 + 1}{x}; \quad 48.f(x) = x^x.$$

B. È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ k & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

dove k è una costante assegnata.

- (a) Determinare la costante k in modo che f risulti continua in 0;
(b) determinare la costante k in modo che f risulti derivabile in 0, e calcolare il valore di $f'(0)$.

C. Dimostrare che, per ogni $x > 0$, valgono le disuguaglianze

$$\frac{1}{x+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{(x+1)^2+1} \leq \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

D. Calcolare il massimo e il minimo della funzione data nell'intervallo a fianco indicato.

$$f(x) = \frac{(\log x)^2}{x} \quad x \in [e^{-1/3}, e^3];$$

$$f(x) = \frac{1+x^2-2x^3}{x^2} \quad x \in [-2, -1/2];$$

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad x \in [1/2, 1];$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} \quad x \in [3/2, 4];$$

$$f(x) = \log \frac{x}{x^2+1} \quad x \in [0, 2].$$

E. Dimostrare le identità

$$2 \arctan x = \arctan \frac{2x}{1-x^2};$$

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{per } x > 0; \\ -\pi/2 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

F. Dire quante soluzioni ha ciascuna delle seguenti equazioni

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0;$$

$$\cos x = \frac{x^2}{70}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \log \left(x - \frac{1}{2}\right) = x \log x$$

$$\sin^2 x = 2x.$$

G. In ciascuno dei casi seguenti, sia g l'inversa di f . Calcolare $g'(y_0)$, dove y_0 è il punto indicato.

$$f(x) = \arctan x + e^x, \quad y_0 = \frac{\pi}{4} + e;$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \quad y_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$f(x) = e^x \arctan x, \quad y_0 = e \frac{\pi}{4}.$$