

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Analisi Matematica
Foglio di esercizi 4

(a) Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\frac{|x+2|-2x}{x^2-2x} \leq 1$;
2. $|x+2| + |x-1| \geq 2|x-3|$;
3. $\frac{x-3}{x+2} \leq -1$;
4. $\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \geq 2$;
5. $\frac{1}{x+2} > \frac{x}{x^2-1}$;
6. $x < \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

(b) Disegnare il grafico approssimativo delle seguenti funzioni

1. $f(x) = x^3$;
2. $f(x) = \sin 2x$;
3. $f(x) = 5 \cos x$;
4. $f(x) = \sin x + \cos x$;
5. $f(x) = \sin(x + \pi)$;
6. $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$;
7. $f(x) = |x|$;
8. $f(x) = \sqrt{x^2}$;
9. $f(x) = |x - 1|$;
10. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$;
11. $f(x) = |x^2 + 4x + 3|$;
12. $f(x) = [x]$;
13. $f(x) = \{x\} = x - [x]$;
14. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$;
15. $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$;
16. $f(x) = |\log |1 - x^3||$;
17. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$;

18. $f(x) = x + [x]$;
19. $f(x) = [x^2]$;
20. $f(x) = 2^{-x^2}$;
21. $f(x) = 2^{|x|}$;
22. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;
23. $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$;
24. $f(x) = 2^{\frac{x+1}{x-1}}$.
24. $f(x) = 2^{|\log_2(x^2-1)|}$.

(c) Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi. In ciascun caso, dire se sono anche, rispettivamente, massimo e minimo.

$$\begin{aligned}
 A &= \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = \log \frac{n}{n^2+1}\}; \\
 B &= \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = n + \frac{4}{n}\}; \\
 C &= \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = \arctg(n^2 - 5n + 7)\}; \\
 D &= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}} \in \mathbb{N}\}.
 \end{aligned}$$

(d) Risolvere l'equazione, discutendo al variare del parametro k in $\mathbb{R}$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2k.$$

(e) Dimostrare che il prodotto di due numeri interi consecutivi è un numero pari.

(f) Dimostrare che la somma di due numeri interi consecutivi è un numero dispari.

(g) Dimostrare che il prodotto di quattro interi consecutivi, aumentato di 1, è un quadrato perfetto.

(h) Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero $n(n+1)(2n+1)$ è divisibile per 6.

(i) Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero $n(2n^2+1)$ è divisibile per 3.

(l) Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero $n(n^2+5)$ è divisibile per 6.

(m) Siano a e b due numeri reali, e poniamo $c = a + b$. Osservare i seguenti calcoli

$$(a + b)(a - b) = c(a - b)$$

$$a^2 - b^2 = ac - bc$$

$$a^2 - ac = b^2 - bc$$

$$4a^2 - 4ac = 4b^2 - 4bc$$

$$4a^2 - 4ac + c^2 = 4b^2 - 4bc + c^2$$

$$(2a - c)^2 = (2b - c)^2$$

$$2a - c = 2b - c$$

$$2a = 2b$$

$$a = b.$$

Conclusione. Tutti i numeri sono uguali!

Evidentemente nei calcoli qui sopra c'è un errore. Trovarlo.

Curiosità. Come tutti sanno, π non è un numero razionale; tuttavia esso possiede delle “buone approssimazioni” con numeri razionali. Alcuni di essi sono noti fin dall'antichità:

$$22/7 = \mathbf{3,142857142857142857142857142857\dots}$$

$$\pi = \mathbf{3,1415926535897932384626433832795\dots}$$

$$355/113 = \mathbf{3,1415929203539823008849557522124\dots}$$

$$\pi = \mathbf{3,1415926535897932384626433832795\dots}$$

$$104348/33215 = \mathbf{3,1415926539214210447087159415927\dots}$$

$$\pi = \mathbf{3,1415926535897932384626433832795\dots}$$