

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Analisi Matematica
Foglio di esercizi 3

1. Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita $z \in \mathbf{C}$:

- (i) $(1+i)z^3 = 4\sqrt{2}\bar{z}$;
- (ii) $|z|^4 + iz^2 + \bar{z}^2 + i = 0$;
- (iii) $z|z|^2 - i\bar{z} = 0$;
- (iv) $|z|^2 + \frac{z^2}{|z|} - \operatorname{Re} z - 2 = 0, \quad z \neq 0.$

2. Risolvere i seguenti sistemi nelle incognite $z, w \in \mathbf{C}$:

(i)
$$\begin{cases} |1+2z| = \sqrt{5} \\ |z| = 1; \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2; \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} z^2w^2 = -8i \\ zw^4 = 16(1+i); \end{cases}$$

(iv)
$$\begin{cases} z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \quad ; \\ |z| = |w| \end{cases}$$

(v)
$$\begin{cases} |z|^3 = (\operatorname{Re} z)^3 + (\operatorname{Im} z)^3 \\ |z-i| = |z|; \end{cases}$$

(vi)
$$\begin{cases} z^2\bar{z} - z\bar{z} = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1. \end{cases}$$

3. Trovare tutti i numeri complessi z per i quali il numero

$$\frac{z-i}{z+i}$$

è un numero immaginario puro.

4. Determinare per quali valori del parametro reale a l'equazione nella variabile complessa z

$$|z|^2 = i + 2az$$

ha soluzioni.

5. Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbf{C}$ il sistema (nell'incognita $z \in \mathbf{C}$)

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})(bz - a\bar{z}) = 4 \\ z^2 - |z|^2 = 0 \end{cases}$$

ammette qualche soluzione.

6. Sia z un numero complesso tale che

$$0 \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{4}.$$

Dimostrare che il numero $z^3 - 3z + i$ non è reale.

7. Calcolare le radici quadrate di $1 + 4\sqrt{3}i$.

COMPLEMENTI

La circonferenza di Feuerbach (o dei 9 punti). Siano z_1, z_2 e z_3 tre numeri complessi appartenenti alla circonferenza trigonometrica (di centro $(0,0)$ e raggio 1).

(a) Dimostrare che l'ortocentro H del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 è dato dalla formula

$$H = z_1 + z_2 + z_3.$$

(b) Dimostrare che i piedi delle altezze del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 sono dati dalle formule

$$H_{z_1} = \frac{1}{2} \left(H - \frac{z_2 z_3}{z_1} \right),$$

$$H_{z_2} = \frac{1}{2} \left(H - \frac{z_1 z_3}{z_2} \right),$$

$$H_{z_3} = \frac{1}{2} \left(H - \frac{z_1 z_2}{z_3} \right),$$

(dove $H = z_1 + z_2 + z_3$ è l'ortocentro del triangolo, trovato nel punto precedente).

(c) Dalle precedenti identità dedurre che:

$$\frac{H}{2} - H_{z_1} = \frac{z_2 z_3}{2z_1},$$

$$\frac{H}{2} - H_{z_2} = \frac{z_1 z_3}{2z_2},$$

$$\frac{H}{2} - H_{z_3} = \frac{z_1 z_2}{2z_3},$$

e che (indicando con $|z|$ il modulo del numero complesso z),

$$\left| \frac{H}{2} - H_{z_1} \right| = \left| \frac{H}{2} - H_{z_2} \right| = \left| \frac{H}{2} - H_{z_3} \right| = \frac{1}{2}.$$

Interpretazione. Questa formula dice che i piedi delle tre altezze nel triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 sono equidistanti da $H/2$. In altre parole, il

circocentro del triangolo di vertici $H_{z_1}, H_{z_2}, H_{z_3}$ è appunto $H/2$; inoltre il raggio del cerchio circoscritto al triangolo di vertici $H_{z_1}, H_{z_2}, H_{z_3}$ è metà di quello del triangolo vertici z_1, z_2, z_3 .

La circonferenza $\mathcal{C}$ ora trovata (cioè quella con centro in $H/2$ e raggio $1/2$) è la cosiddetta *circonferenza dei nove punti*, perché ad essa appartengono, oltre che i piedi delle tre altezze ($H_{z_1}, H_{z_2}, H_{z_3}$), altri 6 punti notevoli. Infatti:

(d) Dimostrare che, oltre che dai piedi delle tre altezze, $\mathcal{C}$ passa anche per i punti medi dei lati del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 e dai punti medi dei segmenti che congiungono l'ortocentro con i vertici del medesimo triangolo. Seguire la traccia seguente:

(i) dimostrare che il punto medio del lato $z_1 z_2$ è dato da $M_{z_3} = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Quindi

$$\left| \frac{H}{2} - M_{z_3} \right| = \left| \frac{z_3}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Lo stesso per gli altri punti medi.

(ii) dimostrare che il punto medio del segmento $z_1 H$ è dato da $\frac{z_1 + H}{2}$, e quindi anche la distanza di questo punto da $H/2$ è uguale a

$$\left| \frac{H}{2} - \frac{z_1 + H}{2} \right| = \left| -\frac{z_1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Lo stesso accade per gli altri punti medi.

Commento. La dimostrazione “geometrica” delle precedenti proprietà della circonferenza di Feuerbach è “elementare” (nel senso che fa intervenire solo alcuni risultati di base della geometria piana euclidea), ma niente affatto banale (provare per credere). Il ricorso ai numeri complessi rende le cose molto più semplici.