

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Analisi Matematica
Foglio di esercizi 2

1. (Disuguaglianza di Bernoulli). Siano $x \in \mathbb{R}$, con $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare per induzione che

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. Dimostrare per induzione le seguenti formule (valide $\forall n \in \mathbb{N}^*$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}; \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1}; \\ \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{n}; \\ \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

3. Dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze (valide $\forall n \in \mathbb{N}^*$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 &\leq \frac{n^4}{4} \leq \sum_{k=1}^n k^3; \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha &\leq \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq \sum_{k=1}^n k^\alpha, \text{ (dove } \alpha \in \mathbb{N}) \\ &\text{(Traccia: usare la disuguaglianza di Bernoulli (Es.1)).} \\ 2\sqrt{n} - 2 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1. \\ &\text{(Traccia: dimostrare dapprima che} \\ 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \\ (a+b)^n &\leq 2^{n-1}(a^n + b^n) \text{ (dove } a \text{ e } b \text{ sono due numeri reali } \geq 0).\end{aligned}$$

4. Sia $\mathcal{P}(n)$ l'enunciato $\sum_{k=1}^n k = \frac{(2n+1)^2}{8}$. Mostrare che $\mathcal{P}(n)$ è *induttivo* (cioè se $\mathcal{P}(n)$ è vero per un certo intero n , allora è vero anche per l'intero $n+1$). Si può affermare che $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni intero n ?

5. Siano $a_1, a_2, a_3, \dots$ dei numeri reali positivi, tali che, per ogni $n \geq 2$, risulti $a_n \leq 3a_{n-1}$. Dimostrare per induzione che $a_n \leq 3^{n-1}a_1$.

6. Consideriamo i due enunciati

$\mathcal{P}(n) = 9$ è divisore di $10^n - 1$ e $\mathcal{Q}(n) = 9$ è divisore di $10^n + 1$.

- (a) Dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{Q}(n)$ sono induttivi.
- (b) Trovare i valori di n per i quali $\mathcal{P}(n)$ è vero.
- (b) Trovare i valori di n per i quali $\mathcal{Q}(n)$ è vero.

7. Trovare l'errore nel ragionamento per induzione seguente. Sia $\mathcal{P}(n)$ la proprietà: "in ogni gruppo di n persone, tutti i componenti hanno la stessa età".

(i) $\mathcal{P}(1)$ è ovviamente vera.

(ii) Sia n tale che $\mathcal{P}(n)$ è vera. Sia G un gruppo di $n+1$ persone, numerate da 1 a $n+1$. Sia G_1 (risp. G_2) il gruppo formato dalle prime (risp. ultime) n persone di G . Poiché $\mathcal{P}(n)$ è vera, tutte le persone appartenenti a G_1 (risp. a G_2) hanno la stessa età. D'altra parte, la persona numerata con n fa parte sia di G_1 che di G_2 . Allora tutte le persone appartenenti a G hanno la stessa età della persona numerata con n , e quindi hanno tutte la stessa età. Dunque $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Conclusione. Tutti gli esseri umani hanno la stessa età! (questo esempio, o meglio una leggera variante di esso, è dovuto a G. Polya).

8. Indichiamo con b un intero positivo fissato. Dimostrare per induzione il seguente enunciato. Per ogni intero $n \geq 0$, esistono due interi q e r , con $q \geq 0$ e $0 \leq r < b$, tali che $n = qb + r$. (q è il quoziente e r è il resto della divisione di n per b).

9.(a) Dimostrare per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero $n(2n+1)$ è divisibile per 3.

(b) Dimostrare per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero $n(n+5)$ è divisibile per 6.

10. Siano a e b due numeri reali. Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{2n} x^{2n-k} y^k \geq 0.$$