

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Analisi Matematica
Foglio di esercizi 1

1. Dedurre dagli assiomi algebrici di $\mathbb{R}$ le proprietà seguenti:

1. $a \cdot 0 = 0$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).
2. Se $a + b = a + c$, allora $b = c$ (semplificazione per l'addizione).
3. Se $a \cdot b = a \cdot c$ e $a \neq 0$, allora $b = c$ (semplificazione per la moltiplicazione).
4. La definizione di sottrazione: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste un unico numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $a + c = b$ (e si scrive $c = b - a$).
5. La definizione di divisione: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, esiste un unico numero $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot c = b$ (e si scrive $c = \frac{b}{a}$).
6. Se $a \cdot b = 0$, allora deve essere $a = 0$ oppure $b = 0$ (legge di annullamento del prodotto).
7. $-(-a) = a$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).
8. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ ($\forall a \neq 0$).
9. $-(a + b) = -a - b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$).
10. $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ ($\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).
11. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$).

2. Dedurre dagli assiomi di ordinamento di $\mathbb{R}$ le proprietà seguenti:

1. La relazione $\leq$ è *riflessiva*, cioè $a \leq a$ ($\forall a \in \mathbb{R}$).
2. La relazione $\leq$ è *antisimmetrica*, cioè se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$).
3. La relazione $\leq$ è *transitiva*, cioè se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$ ($\forall a, b, c \in \mathbb{R}$).
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ risulta $a \leq b$ oppure $b \leq a$.
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $0 \leq a$ e $0 \leq b$, allora $0 \leq a \cdot b$.
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $0 \leq a$ e $0 \geq b$, allora $a \cdot b \leq 0$.
8. $a^2 \geq 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $a^2 > 0$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$ e $c \geq 0$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$; se $a \leq b$ e $c \leq 0$, allora $a \cdot c \geq b \cdot c$.
10. $\forall a > 0$, si ha $\frac{1}{a} > 0$; $\forall a < 0$, si ha $\frac{1}{a} < 0$.
11. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a \leq b$, si ha $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.