

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Esame di Analisi Matematica
Primo test di verifica a. a. 2005/2006

Risolvere esattamente due tra gli esercizi seguenti. Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

- Primo esercizio.** (a) Dimostrare che $\sqrt{3}$ non è razionale.
(b) Dimostrare che $1 + \sqrt{3}$ non è razionale.
(c) Quanto vale $[\sqrt{3}]$?
(d) Dimostrare che $\{\sqrt{3}\}$ non è razionale.

- Secondo esercizio.** (a) Dire cosa significa che una successione di numeri reali è monotona decrescente.
(b) Si consideri la successione (a_n) definita da

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1}.$$

- Mostrare che (a_n) è monotona decrescente.
(c) Posto $b_n = (-1)^n a_n$, calcolare l'estremo superiore M e l'estremo inferiore m di (b_n) .
(d) Dire se M e m sono anche, rispettivamente, il massimo e il minimo di (b_n) .

- Terzo esercizio.** Trovare tutti i numeri complessi z tali che

$$z^2 = |z|^4.$$

- Quarto esercizio.** (a) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

- (b) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + [\sqrt{n}]}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

SOLUZIONI

Primo esercizio.

(a) Supponiamo per assurdo che esistano due numeri interi $p \geq 1$ e $q \geq 1$ tali che valga la relazione

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q},$$

e quindi, elevando al quadrato, si ha

$$(1.1) \quad p^2 = 3q^2.$$

Nella scomposizione in fattori primi di p , il fattore 3 comparirà con un esponente α (eventualmente sarà $\alpha = 0$ se p non è divisibile per 3), cioè possiamo scrivere

$$(1.2) \quad p = 3^\alpha \tilde{p}, \quad \alpha \in \mathbb{N},$$

dove $\tilde{p}$ rappresenta il prodotto di tutti gli altri fattori primi di p . Analogamente possiamo scrivere

$$(1.3) \quad q = 3^\beta \tilde{q}, \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo la (1.2) e la (1.3) in (1.1) si trova

$$3^{2\alpha} \tilde{p}^2 = 3 \times 3^{2\beta} \tilde{q}^2 = 3^{2\beta+1} \tilde{q}^2.$$

Per l'unicità della scomposizione in fattori primi, dovrà essere allora $2\alpha = 2\beta + 1$. Ma questo è impossibile perché 2α è un numero pari, mentre $2\beta + 1$ è dispari. Dunque $\sqrt{3}$ non è razionale.

(b) Supponiamo per assurdo che esistano due numeri interi $p \geq 1$ e $q \geq 1$ tali che valga la relazione

$$1 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}.$$

Allora sarebbe

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}.$$

Ma l'ultima frazione scritta è un numero razionale, dato che $p-q$ e q sono interi. Dunque $\sqrt{3}$ sarebbe razionale, e sappiamo dal punto (a) che questo non è vero.

(c) Dato che $1 < 3 < 4$, estraendo la radice quadrata abbiamo $1 < \sqrt{3} < 2$. Dunque il più grande intero che non supera $\sqrt{3}$ è 1; in altre parole $[\sqrt{3}] = 1$.

(d) Dal punto precedente si deduce $\{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - [\sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$. La dimostrazione dell'irrazionalità di $\{\sqrt{3}\}$ è allora analoga a quella del punto (b).

Secondo esercizio.

(a) Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice monotona decrescente se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a_{n+1} < a_n.$$

(b) Per il punto precedente la successione data sarà monotona decrescente se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1},$$

e cioè, togliendo i denominatori, se

$$n^2 + 1 < (n+1)^2 + 1.$$

Svolgendo i calcoli, si perviene alla disuguaglianza

$$2n + 1 > 0,$$

che è valida per ogni intero n . Dunque (a_n) è monotona decrescente.

(c) + (d) Si ha

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{per } n \text{ pari} \\ -a_n & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Per il risultato del punto (b), (b_n) è decrescente per n pari e, a causa del cambio di segno, crescente per n dispari. Ne segue che il valore più grande

assunto da (b_n) è $b_0 = 1$, che è quindi estremo superiore e massimo, e il più piccolo è $b_1 = -1/2$, che è quindi estremo inferiore e minimo.

Terzo esercizio.

Prima soluzione. Passando al modulo, dall'equazione data si ricava l'equazione $|z|^2 = |z|^4$, e cioè $|z|^2(1 - |z|^2) = 0$. Essa ha le soluzioni $|z| = 0$ (e quindi $z = 0$, che è una soluzione dell'equazione di partenza) e $|z| = 1$. Sostituendo nell'equazione data quest'ultima uguaglianza, essa diventa

$$z^2 = 1,$$

che ha le due soluzioni $z = 1$ e $z = -1$. Pertanto le soluzioni dell'equazione di partenza sono 3: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$.

Seconda soluzione. Sostituendo nell'equazione data la nota uguaglianza $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione si trasforma in $z^2 = z^2\bar{z}^2$, ovvero $z^2(1 - \bar{z}^2) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto (valida anche in campo complesso) dovrà essere $z = 0$ oppure $\bar{z}^2 = 1$; quest'ultima relazione dà $\bar{z} = 1$ oppure $\bar{z} = -1$, e, passando al complesso coniugato nei due casi, si trovano le soluzioni $z = 1$ e $z = -1$.

Quarto esercizio. (a) Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ . Dividendo numeratore e denominatore per n la frazione diventa

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

per i noti teoremi sui limiti si deduce che il limite cercato vale 1.

(b) Si può scrivere

$$\frac{n + [\sqrt{n}]}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Il limite della prima frazione è già stato calcolato al punto (a) e vale 1. Basta allora calcolare il secondo. Ricordando la relazione $x - 1 < [x] \leq x$, si può scrivere

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ . Dividendo numeratore e denominatore per n la frazione diventa

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

per i noti teoremi sui limiti si deduce che il limite cercato vale 0. In modo del tutto analogo si ragiona per vedere che anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0.$$

Per il teorema dei carabinieri si conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0,$$

e quindi il limite proposto vale $0 + 1 = 1$.