

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Esame di Analisi Matematica
Prova scritta del 10 gennaio 2007

Primo esercizio. È assegnato il numero complesso $z = 1 + \sqrt{3}i$.

(a) Posto

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}},$$

determinare la forma trigonometrica del numero complesso $z \cdot z_1$.

(b) Determinare i numeri complessi w aventi lo stesso modulo di z e tali che l'angolo formato dai vettori che rappresentano z e w misuri $\pi/3$ (radianti).

(c) Calcolare $|z - w|$ per i numeri complessi w determinati in (b).

Secondo esercizio. (a) Disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{1 - 2^{-x}}{1 + 2^{-x}},$$

determinandone in particolare il più grande insieme di definizione, i limiti agli estremi di tale insieme, il segno, eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.

(b) Determinare in funzione del parametro reale k il numero delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = kx.$$

Terzo esercizio. (a) Trovare i punti di intersezione tra la parabola $\mathcal{P}$ e la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazioni rispettive $y = 1 - x^2$ e $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

(b) Determinare l'area di ciascuna delle due parti limitate del piano racchiuse da $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$.

SOLUZIONI

Primo esercizio. (a) Ricordando l'interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi, si vede che $z \cdot z_1$ ha come modulo il prodotto dei moduli di z e di z_1 e come argomento la somma dei loro due argomenti (naturalmente a meno di multipli di 2π). Calcoliamo dunque modulo e argomento di z e di z_1 . Ricordiamo che il numero complesso $a + ib$

ha modulo uguale a $\sqrt{a^2 + b^2}$ e ogni suo argomento ha coseno uguale a $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e seno uguale a $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Dunque

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2; \quad |z_1| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Pertanto $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1| = 2$.

Inoltre, indicato con θ un argomento di z , si ha

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Un possibile argomento di z è quindi $\theta = \pi/3$. Indicando con α un argomento di z_1 si avrà invece

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Un possibile argomento di z_1 è quindi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Pertanto tutti gli argomenti di $z \cdot z_1$ sono dati da

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) I numeri complessi cercati sono evidentemente due: quello ottenuto ruotando z di un angolo di $+\pi/3$ e quello ottenuto ruotando z di un angolo di $-\pi/3$; indichiamoli rispettivamente con w_1 e w_2 . Ricordando ancora l'interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi, si vede che per ottenere w_1 bisogna moltiplicare z per il numero complesso avente modulo 1 e argomento $+\pi/3$; in altre parole

$$w_1 = (1 + \sqrt{3}i) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

In modo analogo si ragiona per w_2 e si trova

$$w_2 = (1 + \sqrt{3}i) \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.$$

(c) È chiaro che il triangolo T_1 (risp. T_2) avente per lati z e w_1 (risp. z e w_2) è equilatero (ha due lati uguali, e l'angolo compreso misura $\pi/3$).

Il terzo lato di T_1 (risp T_2) è proprio il numero complesso $z - w_1$ (risp. $z - w_2$), che pertanto ha la stessa lunghezza di z e di w_1 (risp. z e di w_1), e cioè 2.

Alternativamente, si ha

$$z - w_1 = (1 + \sqrt{3}i) - (-1 + \sqrt{3}i) = 2,$$

e di conseguenza anche $|z - w_1| = 2$, mentre

$$z - w_2 = (1 + \sqrt{3}i) - (2) = -1 + \sqrt{3}i,$$

da cui, ancora per la formula che dà il modulo di un numero complesso,

$$|z - w_2| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Secondo esercizio. (a) La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre si tratta di una funzione dispari: infatti

$$f(-x) = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -\frac{2^x(2^{-x} - 1)}{2^x(2^{-x} + 1)} = -f(x).$$

Il suo grafico è quindi simmetrico rispetto all'origine. Inoltre $f(0) = 0$, come si verifica subito. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di definizione. Risulta facilmente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^{-x}}{1 + 2^{-x}} = 1,$$

dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$. In modo analogo (oppure ricorrendo alla simmetria del grafico) si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Calcoliamo la derivata prima. Ricordiamo che la derivata di $h(x) = 2^{-x} = e^{-x \log 2}$ è data da $h'(x) = -(\log 2) 2^{-x}$. Quindi

$$f'(x) = \frac{(\log 2) 2^{-x}(1 + 2^{-x}) + (1 - 2^{-x})(\log 2) 2^{-x}}{(1 + 2^{-x})^2} = \frac{(2 \log 2) 2^{-x}}{(1 + 2^{-x})^2}.$$

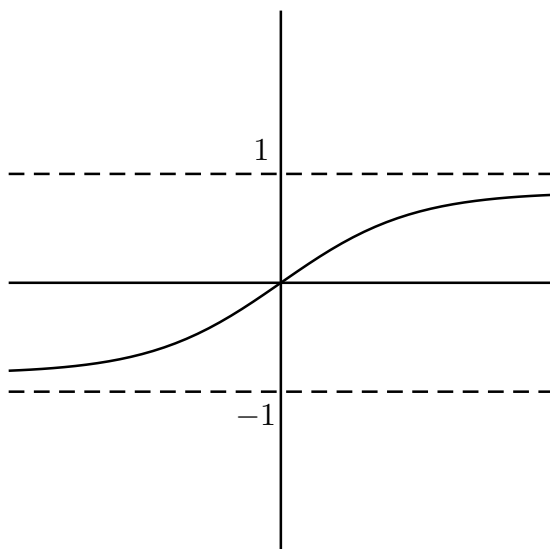
f' è chiaramente strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda gli eventuali punti di flesso, si può già prevedere che ne esista almeno 1, dato che i limiti all'infinito sono finiti (cioè il grafico ha due asintoti orizzontali). Per determinare effettivamente quanti punti di flesso esistono e per stabilire le convessità e concavità del grafico, bisogna calcolare $f''(x)$. Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2 \log 2) \frac{-(\log 2) 2^{-x} (1 + 2^{-x})^2 + 2^{-x} \times 2(1 + 2^{-x})(\log 2) 2^{-x}}{(1 + 2^{-x})^4} \\ &= 2(\log 2)^2 \frac{2^{-x} - 1}{(1 + 2^{-x})^3}. \end{aligned}$$

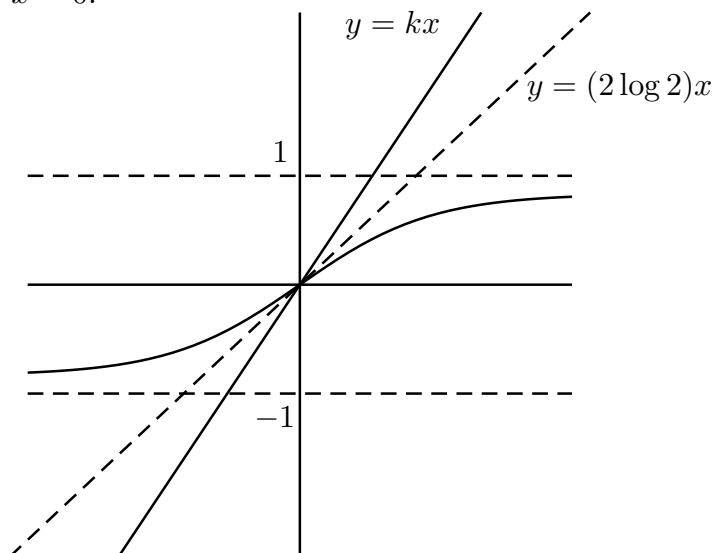
Si vede facilmente che f'' si annulla per $x = 0$, è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. Dunque f è convessa per $x < 0$, concava per $x > 0$ ed ha un flesso in $x = 0$.

Ne risulta il grafico seguente:



(b) È immediato verificare che l'equazione data ammette la soluzione $x = 0$ per ogni valore di k ; inoltre, come abbiamo detto sopra, la funzione f è concava per $x > 0$ (risp. convessa per $x < 0$), quindi per $x > 0$ (risp. per $x < 0$) il suo grafico si trova al di sotto (risp. al di sopra) della retta tangente in $x_0 = 0$. Dato che tale retta tangente ha equazione $y = (2 \log 2)x$,

questo implica che per $k \geq 2 \log 2$ l'unica soluzione dell'equazione assegnata è appunto $x = 0$.

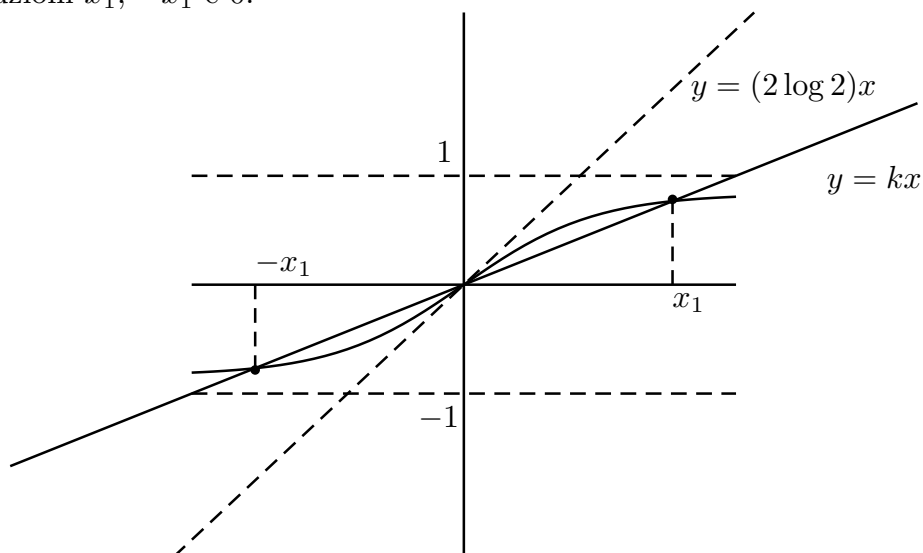


Per $k < 2 \log 2$, la funzione $h(x) = f(x) - kx$ è positiva in un intorno destro di 0 (infatti, poiché la tangente al grafico di f in $x_0 = 0$ ha equazione $y = (2 \log 2)x$, la funzione f per $x > 0$ molto vicino a 0 assumerà valori vicini a $(2 \log 2)x > kx$, e quindi $h(x) \sim (2 \log 2)x - kx > 0$). Invece, per $x > 0$ abbastanza grande (diciamo per $x > M$ opportuno), h sarà negativa, dato che $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1 - \infty = -\infty$. Dunque h cambia segno nell'intervallo $[0, M]$ e, per il teorema di esistenza degli zeri (che si può applicare in quanto h è continua come differenza di funzioni continue), esiste un punto $x_1 \in [0, M]$ tale che $h(x_1) = 0$, e questo significa appunto che x_1 è soluzione dell'equazione data.

È inoltre facile vedere che x_1 è l'unica soluzione positiva: per il teorema di Lagrange, nell'intervallo $[0, M]$ esiste un punto ξ tale che la retta tangente al grafico di f in $x = \xi$ è parallela alla retta $y = kx$ (che seca il grafico in $(0, 0)$ e $(x_1, f(x_1))$). Dato che f è concava nell'intervallo $[\xi, M]$, per $x \in [\xi, M]$ si ha $f'(x) < f'(\xi) = k$, e cioè $h' < 0$ in $[\xi, M]$. In altri termini h , e quindi f , è strettamente decrescente in $[\xi, M]$, e di conseguenza, per $x > x_1$, si ha $f(x) < f(x_1) = 0$.

Abbiamo quindi trovato un'unica soluzione $x_1 > 0$; per motivi di simmetria, anche $-x_1$ è una soluzione dell'equazione data (ed è l'unica soluzione

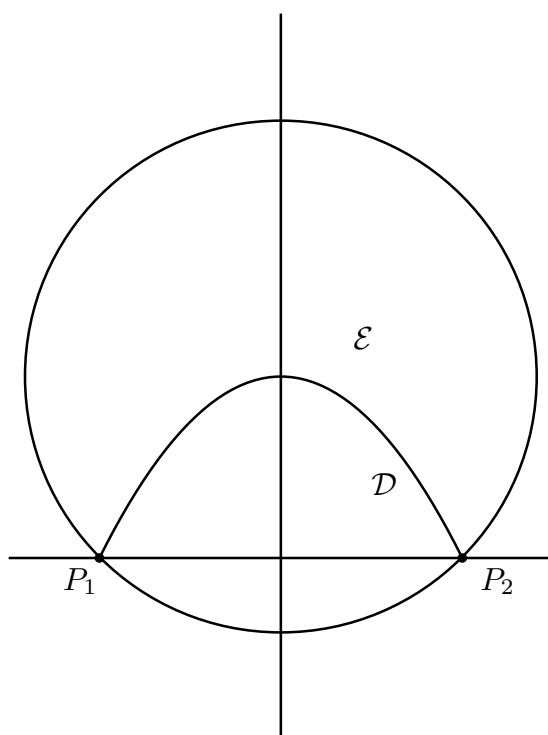
negativa). Si conclude che, per $k < 2 \log 2$, l'equazione ammette le tre soluzioni x_1 , $-x_1$ e 0.



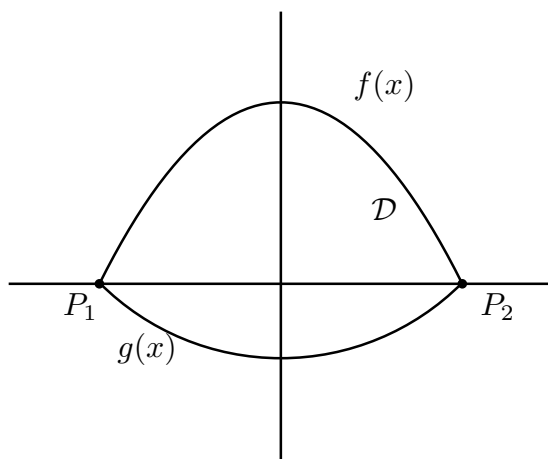
Terzo esercizio. (a) Dalla prima equazione si ricava $x^2 = 1 - y$ e, sostituendo nella seconda, si perviene a $(1 - y) + (y^2 - 2y - 1) = 0$, cioè, effettuando i calcoli $y^2 - 3y = 0$. Questa equazione ha le due soluzioni $y = 0$ e $y = 3$.

In corrispondenza della soluzione $y = 0$ si trova $x^2 = 1 - y = 1$ (quindi $x = 1$ e $x = -1$), e si ottengono i due punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$. Invece, in corrispondenza della soluzione $y = 3$ si trova $x^2 = 1 - y = -2$, che chiaramente non ha soluzioni.

(b) La figura sottostante illustra la situazione



L'equazione della circonferenza assegnata può scriversi nella forma $x^2 + (y - 1)^2 = 2$, e si vede così che essa ha centro nel punto $(0, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. L'area del cerchio vale dunque 2π , e di conseguenza $Area(\mathcal{E}) = 2\pi - Area(\mathcal{D})$. Basterà allora calcolare l'area di $\mathcal{D}$ (ved. figura sottostante), che evidentemente è uguale alla somma tra l'area della parte di piano compresa fra l'asse x e il grafico della funzione $f(x) = 1 - x^2$ e quella della parte di piano compresa fra il grafico della funzione $g(x) = 1 - \sqrt{2 - x^2}$ e l'asse x (per determinare g si procede così: dall'equazione della circonferenza si ricava che $(y - 1)^2 = 2 - x^2$, e quindi l'espressione $y - 1 = \sqrt{2 - x^2}$, o $y = 1 + \sqrt{2 - x^2}$, fornisce il grafico della parte della circonferenza che si trova al di sopra della retta $y = 1$. In modo analogo l'espressione $y = 1 - \sqrt{2 - x^2}$ dà la parte della circonferenza che si trova al di sotto della retta $y = 1$).



Osservando che la funzione g è negativa tra -1 e 1 , scriveremo dunque

$$Area(\mathcal{D}) = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - \sqrt{2 - x^2}) dx = 2 - \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} dx.$$

Per quest'ultimo integrale utilizziamo il cambiamento di variabile $x = \sqrt{2} \sin y$ (cioè $y = \arcsin(x/\sqrt{2})$, $y \in [-(\pi/2), (\pi/2)]$), da cui si trova $dx = \sqrt{2} \cos y dy$. Gli estremi di integrazione diventano rispettivamente $\arcsin(-1/\sqrt{2}) = -\pi/4$ e $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, e quindi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2 - 2 \sin^2 y} \cdot \sqrt{2} \cos y dy \\ &= 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 y dy = y + \sin y \cos y \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

(si osservi che che, se $y \in [-(\pi/2), (\pi/2)]$, il $\cos y$ ha segno positivo e quindi si ha $\sqrt{1 - \sin^2 y} = \cos y$).

Si conclude che

$$Area(\mathcal{D}) = \frac{4}{3} - \left(2 - \left[\frac{\pi}{2} + 1\right]\right) = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2};$$

$$Area(\mathcal{E}) = 2\pi - Area(\mathcal{D}) = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{3}.$$