

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Esame di Analisi Matematica
Secondo test di verifica a. a. 2006/2007

Risolvere esattamente due tra gli esercizi seguenti. Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Primo esercizio. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

- (a) Determinare $A = \text{Im} f$.
- (b) Mostrare che f è strettamente crescente. Determinare poi $f^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}$, dopo avere giustificato la sua esistenza.
- (c) Mostrare che f è *dispari*, cioè che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta $f(x) = -f(-x)$. Disegnare poi il grafico approssimativo di f .

Secondo esercizio. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{per } x \leq \pi/2, \\ e^{x-c} & \text{per } x > \pi/2, \end{cases}$$

dove c è un parametro reale.

- (a) Determinare c in modo che f risulti continua nel punto $x_0 = \pi/2$.
- (b) Determinare c in modo che f risulti derivabile nel punto $x_0 = \pi/2$.
- (c) Per i valori di c trovati in (b) f risulta anche 2 volte derivabile in $x_0 = \pi/2$?

Terzo esercizio. (a) Calcolare, per ogni $\alpha > 0$,

$$\int e^{\alpha x} \sin x \, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int e^x \sin x \cos x \, dx.$$

(SUGGERIMENTO. Utilizzare la formula di duplicazione del seno e sfruttare il risultato del punto (a)).

SOLUZIONI

Primo esercizio. Si chiede di trovare l'insieme A dei numeri reali y tali che esista almeno un $x \in \mathbb{R}$, con $f(x) = y$; in altre parole, dobbiamo vedere per quali y l'equazione

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y$$

ammette almeno una soluzione x .

L'equazione precedente, con semplici calcoli, si trasforma nell'equazione equivalente

$$e^x(1 - y) = 1 + y.$$

Per $y = 1$ l'equazione non ha soluzioni (il primo membro è uguale a 0, mentre il secondo è uguale a 2). Per $y \neq 1$, si può dividere per $(1 - y)$ e si ottiene

$$e^x = \frac{1 + y}{1 - y}.$$

Affinché questa equazione abbia soluzioni è necessario e sufficiente che sia

$$(*) \quad \frac{1 + y}{1 - y} > 0$$

(dato che l'immagine della funzione $x \mapsto e^x$ è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi). Dunque A coincide con l'insieme dei numeri reali y soluzioni di $(*)$, cioè, come si verifica facilmente, con l'intervallo aperto $A = (-1, 1)$.

(b) *Primo metodo.* Si tratta di far vedere che, se $x < y$, allora $f(x) < f(y)$, cioè che

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} < \frac{e^y - 1}{e^y + 1}.$$

I due denominatori in questa disuguaglianza sono strettamente positivi, e dunque si possono moltiplicare entrambi i suoi membri per il loro prodotto $(e^x + 1)(e^y + 1)$ senza cambiare il verso, ottenendo la relazione equivalente

$$(e^x - 1)(e^y + 1) < (e^y - 1)(e^x + 1).$$

Eseguendo i calcoli e semplificando si perviene alla disequaglianza (ancora equivalente a quella iniziale)

$$e^x < e^y,$$

che è ovviamente verificata se $x < y$ perché la funzione esponenziale (con base $e > 1$) è crescente.

Secondo metodo. Utilizziamo il criterio di monotonia basato sulla derivata prima. Si tratta di verificare che $f'(x) > 0$ per ogni x . Risulta infatti, per ogni x ,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

(il numeratore e il denominatore di questa frazione sono strettamente positivi per ogni x).

$f : \mathbb{R} \rightarrow A$ è invertibile in quanto iniettiva (ogni funzione strettamente monotona lo è) e surgettiva ($A = \text{Im} f$). Nel punto (a) abbiamo visto che, per $y \in A$, si ha

$$e^x = \frac{1+y}{1-y}, \quad \text{quindi} \quad x = \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

Dunque $f^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}$ è definita dalla formula

$$f^{-1}(x) = \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

(c) Dobbiamo verificare che, per ogni x , si ha $f(-x) = -f(x)$. Risulta infatti

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^x(e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{1 + e^x} = -f(x).$$

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$, come sappiamo. Trattandosi di una funzione dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre

$f(0) = 0$, come si verifica subito. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di definizione. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^{-x}(e^x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1,$$

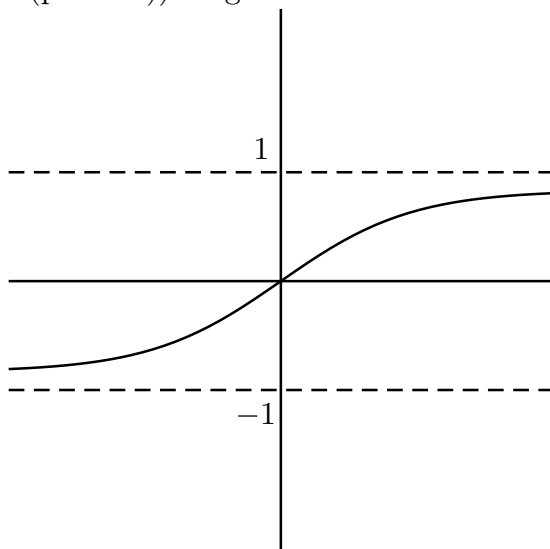
dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. In modo analogo (oppure ricorrendo alla simmetria del grafico) si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Infine, dal punto (b) sappiamo che f è strettamente crescente, dunque non ha punti di massimo o minimo relativo. Per quanto riguarda gli eventuali punti di flesso, si può già prevedere che ne esista almeno 1, dato che i limiti all'infinito sono finiti (cioè il grafico ha due asintoti orizzontali). Per determinare effettivamente quanti punti di flesso esistono, bisogna intanto risolvere l'equazione $f''(x) = 0$. Si ha

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x \times 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^4} = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^4}.$$

Si vede facilmente che f'' si annulla solo per $e^x = 1$, cioè per $x = 0$, che è quindi un punto di flesso (per le considerazioni svolte sopra: ricordare che un punto in cui si annulla la derivata seconda non è necessariamente un punto di flesso (perché?)). Il grafico che si ottiene è quindi



Secondo esercizio. (a) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} 1 - \cos x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} e^{x-c} = e^{(\pi/2)-c}.$$

Dunque intanto il $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$ esiste se e solo se i due limiti destro e sinistro coincidono, ovvero se

$$e^{(\pi/2)-c} = 1,$$

il che accade solo per $c = \pi/2$. Inoltre per tale valore di c il limite cercato vale 1; dato che si ha anche $f(\pi/2) = 1 - \cos(\pi/2) = 1$, si conclude che per $c = \pi/2$. (e solo per tale valore) f risulta continua in $x_0 = \pi/2$.

(b) È noto dalla teoria che una funzione derivabile è necessariamente continua. Dunque f non può essere derivabile (in $x_0 = \pi/2$) se $c \neq \pi/2$. Vediamo cosa accade per $c = \pi/2$. Per questo, è necessario calcolare il rapporto incrementale di f in $x_0 = \pi/2$. Dall'espressione di f si ricava

$$\frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - (\pi/2)} = \begin{cases} \frac{-\cos x}{x - (\pi/2)} & \text{per } x \leq \pi/2, \\ \frac{e^{x - (\pi/2)} - 1}{x - (\pi/2)} & \text{per } x > \pi/2. \end{cases}$$

f risulterà derivabile in $x_0 = \pi/2$ se i limiti destro e sinistro per $x \rightarrow \pi/2$ del rapporto incrementale esistono e sono uguali. Dall'espressione qui sopra si ricava facilmente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - (\pi/2)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{x - (\pi/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos((\pi/2) - y)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \end{aligned}$$

(si è utilizzato il cambiamento di variabile $y = (\pi/2) - x$) e

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - (\pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{x - (\pi/2)} - 1}{x - (\pi/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1;$$

qui si è utilizzato il cambiamento di variabile $y = x - (\pi/2)$. Si conclude che, per $c = \pi/2$, f è derivabile in $x_0 = \pi/2$ e $f'(\pi/2) = 1$.

(c) Si ha (ved. punto (b))

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{per } x < \pi/2, \\ 1 & \text{per } x = \pi/2, \\ e^{x-(\pi/2)} & \text{per } x > \pi/2. \end{cases}$$

f risulta 2 volte derivabile in $x_0 = \pi/2$ se i limiti destro e sinistro per $x \rightarrow \pi/2$ del rapporto incrementale di f' esistono e sono uguali. Dall'espressione qui sopra si ricava facilmente

$$\frac{f'(x) - f'(\pi/2)}{x - (\pi/2)} = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x - (\pi/2)} & \text{per } x < \pi/2, \\ \frac{e^{x-(\pi/2)} - 1}{x - (\pi/2)} & \text{per } x > \pi/2, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{f'(x) - f'(\pi/2)}{x - (\pi/2)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - (\pi/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin((\pi/2) - y) - 1}{-y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} \times \lim_{y \rightarrow 0} y = \frac{1}{2} \times 0 = 0; \end{aligned}$$

invece

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{f'(x) - f'(\pi/2)}{x - (\pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{x-(\pi/2)} - 1}{x - (\pi/2)} = 1,$$

come abbiamo già visto nel punto (b). Poiché i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale di f' , pur essendo entrambi finiti, sono diversi tra loro, si conclude che f non è due volte derivabile in $x_0 = \pi/2$.

Terzo esercizio. (a) Eseguendo un'integrazione per parti (con i simboli usati a lezione, prendiamo $g = e^{\alpha x}$ e $F = \sin x$), si ha

$$(*) \quad \int e^{\alpha x} \sin x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin x - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos x \, dx.$$

Integrando ancora per parti (questa volta $g = e^{\alpha x}$ e $F = \cos x$), si trova

$$\int e^{\alpha x} \cos x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos x + \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin x \, dx;$$

utilizzando la formula qui ottenuta nella relazione (*), si trova

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \sin x \, dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin x - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cos x + \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin x \, dx \right) \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin x - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \cos x - \frac{1}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} \sin x \, dx \end{aligned},$$

e quindi

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \int e^{\alpha x} \sin x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sin x - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \cos x + c,$$

ed infine

$$\int e^{\alpha x} \sin x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha x} \sin x - \frac{1}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha x} \cos x + c.$$

(b) Per la formula di duplicazione del seno, si ha

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Quindi

$$\int e^x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int e^x \sin(2x) \, dx = \frac{1}{4} \int e^{y/2} \sin y \, dy,$$

dove si è utilizzato il cambiamento di variabili $y = 2x$. Sfruttando ora la formula del punto (a) (per $\alpha = 1/2$) si conclude che

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} e^{y/2} \sin y - \frac{4}{5} e^{y/2} \cos y \right) + c \Big|_{y=2x} \\ &= \frac{1}{10} e^x \sin(2x) - \frac{1}{5} e^x \cos(2x) + c. \end{aligned}$$