

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica
Primo test di verifica a. a. 2006/2007

Risolvere esattamente due tra gli esercizi seguenti. Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Primo esercizio. Una biblioteca è formata per l'80 % di libri scritti in Italiano, e per il restante 20 % di libri scritti in altre lingue. Il 30 % dei libri in Italiano sono romanzi, mentre la stessa percentuale per i libri stranieri è del 40 %.

- (a) Calcolare la probabilità che un libro scelto a caso sia un romanzo.
- (b) Si sceglie un libro a caso, che risulta essere un romanzo. Quanto vale la probabilità che esso non sia scritto in Italiano?
- (c) Se invece esso non è un romanzo, quanto vale la probabilità che sia scritto in Italiano?

Secondo esercizio. Un postino deve consegnare tre lettere, che indichiamo con A , B e C , infilandole in tre diverse cassette postali, una per ogni cassetta. Precisamente egli deve mettere la lettera A nella cassetta 1, la B nella cassetta 2 e la C nella cassetta 3. Tuttavia, poiché ha fretta, egli infila le tre lettere una per cassetta, ma a caso.

- (a) Quanto vale la probabilità che ciascuna lettera sia stata messa nella cassetta giusta?
- (b) Posto X = numero di lettere messe nella cassetta giusta, calcolare la densità e la media di X .
- (c) Se una lettera è stata messa nella cassetta giusta, quanto vale la probabilità che lo siano state tutte e tre?

Terzo esercizio. Siano X e Y due v. a. aventi densità congiunta

$$p(1, 1) = p(-1, 1) = \frac{1}{8}; \quad p(2, 4) = p(-2, 4) = \frac{3}{8}.$$

- (a) Calcolare le densità di X e di Y .
- (b) Calcolare la densità e la media di $Z = XY$.
- (c) Calcolare $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
- (d) X e Y sono indipendenti?

SOLUZIONI

Primo esercizio. Consideriamo gli eventi

$$I = \{\text{il libro scelto è scritto in Italiano}\}$$

$$R = \{\text{il libro scelto è un romanzo}\}.$$

I dati del problema sono i seguenti

$$P(I) = 0.8; \quad P(R|I) = 0.3; \quad P(R|I^c) = 0.4.$$

(a) Si chiede la probabilità dell'evento R . Per note formule si ha

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|I)P(I) + P(R|I^c)P(I^c) \\ &= P(R|I)P(I) + P(R|I^c)(1 - P(I)) = 0.3 \times 0.8 + 0.4 \times (1 - 0.8) \\ &= 0.24 + 0.08 = 0.32. \end{aligned}$$

(b) Dobbiamo calcolare $P(I^c|R)$. Per definizione di probabilità condizionale, si ha

$$P(I^c|R) = \frac{P(R \cap I^c)}{P(R)}.$$

Il denominatore è già stato calcolato nel punto precedente e vale 0.32. Il numeratore, di nuovo per la definizione di probabilità condizionale, è uguale a (ved. anche il punto (a))

$$P(R|I^c)P(I^c) = P(R|I^c)(1 - P(I)) = 0.4 \times (1 - 0.8) = 0.08.$$

Quindi

$$P(I^c|R) = \frac{P(R \cap I^c)}{P(R)} = \frac{0.08}{0.32} = 0.25.$$

(c) Qui dobbiamo calcolare $P(I|R^c)$. Possiamo intanto scrivere

$$P(I|R^c) = \frac{P(R^c \cap I)}{P(R^c)}.$$

Il denominatore si calcola subito: $P(R^c) = 1 - P(R) = 1 - 0.32 = 0.68$. Per quanto riguarda il numeratore, possiamo ragionare così. Dato che $I = (R \cap I) \cup (R^c \cap I)$, e questa è un'unione disgiunta, per la proprietà di additività della probabilità abbiamo $P(I) = P(R \cap I) + P(R^c \cap I)$, e quindi

$$P(R^c \cap I) = P(I) - P(R \cap I) = P(I) - P(R|I)P(I) = 0.8 - 0.3 \times 0.8 = 0.56,$$

dove la seconda uguaglianza segue al solito dalla definizione di probabilità condizionale. In conclusione

$$P(I|R^c) = \frac{P(R^c \cap I)}{P(R^c)} = \frac{0.56}{0.68} = 0.823.$$

Secondo esercizio. La cosa più semplice è costruire in modo esplicito lo spazio di probabilità che modella la situazione. L'insieme Ω dei possibili risultati dell'“esperimento” può essere identificato (cioè messo in corrispondenza biunivoca) con l'insieme delle applicazioni biunivoche dell'insieme $\{A, B, C\}$ nell'insieme $\{1, 2, 3\}$ (con ovvia interpretazione per ciascuna di esse). Elenchiamole (sono solo 6):

$$\begin{aligned} \omega_1 : \begin{cases} A \rightarrow 1 \\ B \rightarrow 2 \\ C \rightarrow 3 \end{cases}, & \omega_2 : \begin{cases} A \rightarrow 1 \\ B \rightarrow 3 \\ C \rightarrow 2 \end{cases}, & \omega_3 : \begin{cases} A \rightarrow 2 \\ B \rightarrow 1 \\ C \rightarrow 3 \end{cases}, \\ \omega_4 : \begin{cases} A \rightarrow 2 \\ B \rightarrow 3 \\ C \rightarrow 1 \end{cases}, & \omega_5 : \begin{cases} A \rightarrow 3 \\ B \rightarrow 1 \\ C \rightarrow 2 \end{cases}, & \omega_6 : \begin{cases} A \rightarrow 3 \\ B \rightarrow 2 \\ C \rightarrow 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dato che il postino infila le lettere a caso nelle cassette, non c'è ragione di pensare che una di queste possibilità si presenti con probabilità diversa dalle altre, quindi consideriamo su Ω la probabilità uniforme, ovvero

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{6}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

A questo punto rispondere alle domande è piuttosto semplice.

(a) Qui si chiede semplicemente $P(\omega_1)$ (ved. elenco precedente), e quindi la risposta è $1/6$.

(b) Scriviamo esplicitamente la v. a. X , elencando il valore che essa prende su ciascun elemento di Ω . Si vede subito che $X(\omega_1) = 3$, $X(\omega_2) = 1$, $X(\omega_3) = 1$, $X(\omega_4) = 0$, $X(\omega_5) = 0$, $X(\omega_6) = 1$; quindi i valori assunti da X sono i numeri 0, 1, 3, e le rispettive probabilità valgono

$$P(X = 0) = P(\{\omega_4, \omega_5\}) = \frac{2}{6}; \quad P(X = 1) = P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_6\}) = \frac{3}{6};$$

$$P(X = 3) = P(\omega_1) = \frac{1}{6}.$$

Il valore medio di X è pertanto

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{2}{6} + 1 \times \frac{3}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = 1.$$

(c) Qui si chiede evidentemente $P(X = 3|X \geq 1)$. Per la definizione di probabilità condizionale, si ha

$$P(X = 3|X \geq 1) = \frac{P(X = 3, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 3)}{P(X \geq 1)},$$

dove l'ultima eguaglianza è dovuta al fatto che $\{X = 3\} \subseteq \{X \geq 1\}$, e quindi $\{X = 3, X \geq 1\} = \{X = 3\}$.

Dato che $P(X = 3) = 1/6$ e $P(X \geq 1) = P(X = 3) + P(X = 1) = 4/6$, si ottiene

$$P(X = 3|X \geq 1) = \frac{1/6}{4/6} = \frac{1}{4}.$$

Terzo esercizio. (a) Per note formule si ha

$$P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 2) = P(X = -2) = \frac{3}{8};$$

$$P(Y = 1) = p(1, 1) + p(-1, 1) = \frac{2}{8}, \quad P(Y = 4) = p(2, 4) + p(-2, 4) = \frac{6}{8}.$$

(b) La v. a. Z prende evidentemente i valori 1, -1 , 8 e -8 , con probabilità rispettive

$$P(Z = 1) = p(1, 1) = \frac{1}{8}, \quad P(Z = -1) = p(-1, 1) = \frac{1}{8},$$

$$P(Z = 8) = p(2, 4) = \frac{3}{8}, \quad P(Z = -8) = p(-2, 4) = \frac{3}{8}.$$

La media di Z vale quindi

$$\mathbf{E}[Z] = 1 \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + (-8) \times \frac{3}{8} = 0.$$

(c) Usiamo la formula

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y].$$

$\mathbf{E}[XY]$ è già stata calcolata nel punto precedente e vale 0. Calcoliamo allora $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{E}[Y]$. Si ha subito, dal punto (a)

$$\mathbf{E}[X] = 1 \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + (-2) \times \frac{1}{8} = 0;$$

$$\mathbf{E}[Y] = 1 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{6}{8} = \frac{26}{8}.$$

Si trova dunque $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

(d) X e Y non sono indipendenti: infatti, per esempio, si ha

$$P(X = 1, Y = 4) = p(1, 4) = 0,$$

mentre

$$P(X = 1)P(Y = 4) = \frac{1}{8} \times \frac{6}{8} \neq 0.$$