

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Esame di Analisi Matematica
Primo test di verifica a. a. 2006/2007

Risolvere esattamente due tra gli esercizi seguenti. Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Primo esercizio. (a) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z \cdot \bar{z} = iz^3.$$

(b) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(*) \quad z \cdot \bar{z} = iz^n,$$

dove n è un intero fissato ≥ 3 .

Secondo esercizio. (a) Mostrare che la successione

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

è monotona decrescente.

(b) Dire se la successione

$$b_n = \frac{n+2}{n+1} \cos n\pi$$

è limitata, e se ha massimo e minimo. In caso affermativo calcolarli.

Terzo esercizio. (a) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{\log n}{n^2} \right).$$

(b) Individuare i numeri reali $\beta > 0$ per i quali il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{\log n}{n^\beta} \right)$$

esiste finito, e in tali casi calcolarlo.

SOLUZIONI

Primo esercizio. (a) Si vede subito che l'equazione data ammette la soluzione $z_1 = 0$. Per $z \neq 0$, si può dividere per z e otteniamo l'equazione più semplice

$$(*) \quad \bar{z} = iz^2,$$

che può essere risolta in due modi.

(i) *Primo metodo.* Scriviamo z in forma cartesiana, cioè poniamo

$$z = a + ib.$$

Si ha allora

$$\bar{z} = a - ib, \quad iz^2 = i(a + ib)^2 = i(a^2 - b^2 + i(2ab)) = -2ab + i(a^2 - b^2).$$

Dato che due numeri complessi sono uguali se e solo se le loro parti reali e le loro parti immaginarie sono uguali, l'equazione (*) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a = -2ab \\ -b = a^2 - b^2 \\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La prima equazione di questo sistema ha le soluzioni $a = 0$ e $b = -1/2$. Per $a = 0$ la seconda equazione diventa $b = b^2$, ed ha le soluzioni $b = 0$ e $b = 1$. Poiché deve essere $z \neq 0$, si trova dunque la soluzione $z_2 = i$.

Per $b = -1/2$ la seconda equazione diventa $a^2 = 3/4$, ed ha le soluzioni $a = \sqrt{3}/2$ e $a = -\sqrt{3}/2$. Si trovano dunque le due soluzioni

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

(ii) *Secondo metodo.* Scriviamo z in forma trigonometrica, cioè poniamo $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Allora $\bar{z}$ è un numero complesso che ha ancora modulo ρ e argomento $-\theta$ (a meno di multipli di 2π). Invece z^2 è un numero complesso che ha modulo ρ^2 e argomento 2θ (sempre a meno

di multipli di 2π). Poiché i ha modulo 1 e argomento $(\pi/2)$, il numero complesso iz^2 ha modulo ρ^2 e argomento $2\theta + (\pi/2)$.

Dato che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e i loro argomenti differiscono per un multiplo di 2π , si ottengono le relazioni

$$\rho = \rho^2, \quad -\theta = 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La prima equazione ha le soluzioni $\rho = 0$ (cioè $z_1 = 0$) e $\rho = 1$; la seconda equivale a

$$-3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

e cioè

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Per $k = 0, 1, 2$ si trovano rispettivamente gli argomenti

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{6}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{7}{6}\pi,$$

e quindi le soluzioni (ricordare che $\rho = 1$)

$$z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_4 = \cos\frac{7}{6}\pi - i \sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Per gli altri valori di k gli argomenti differiscono dai tre precedenti per un multiplo di 2π , e quindi danno luogo alle stesse soluzioni.

(b) Anche in questo caso l'equazione data ammette la soluzione $z_1 = 0$. Per $z \neq 0$, si può dividere per z e otteniamo l'equazione più semplice

$$\bar{z} = iz^{n-1}.$$

Il metodo della forma cartesiana non è comodo in questo caso, perché dovremmo sviluppare la potenza $(a + ib)^{n-1}$. Invece, passando alla forma trigonometrica e ripetendo esattamente il ragionamento seguito nel punto (a), si perviene alle relazioni

$$\rho = \rho^{n-1}, \quad -\theta = (n-1)\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La prima relazione ha le soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 1$ (come in (a)). La seconda si trasforma in

$$-n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

cioè

$$\theta = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ragionando come nel punto (a), per $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ si trovano gli n argomenti (diversi)

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2n}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n}\pi, \dots, \quad \theta_n = -\frac{\pi}{2n} + \frac{2(n-1)}{n}\pi,$$

e le soluzioni corrispondenti si scrivono, in forma trigonometrica, in modo analogo a quanto fatto in (a) (ricordare che $\rho = 1$). Per gli altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni, dato che gli argomenti differiscono dai precedenti per un multiplo di 2π .

Secondo esercizio. (a) Si tratta di dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la relazione $a_n > a_{n+1}$, che, scritta in modo esplicito, significa

$$\frac{n+2}{n+1} > \frac{n+3}{n+2}.$$

Riducendo allo stesso denominatore e semplificando, si vede che la disuguaglianza precedente equivale a $(n+2)^2 > (n+1)(n+3)$, e cioè a $n^2 + 4n + 4 > n^2 + 4n + 3$, che è chiaramente vera.

(b) Si verifica subito l'eguaglianza $\cos n\pi = (-1)^n$. Quindi la successione (b_n) coincide con la successione (a_n) per n pari e con la successione $(-a_n)$ per n dispari.

per n dispari. Dato che (a_n) è decrescente, $(-a_n)$ è crescente. Quindi (b_n) è decrescente per n pari e crescente per n dispari. Ne segue che il suo valore massimo (e quindi estremo superiore) è $b_0 = a_0 = 2$, mentre il suo valore minimo (e quindi estremo inferiore) è $b_1 = -a_1 = -3/2$.

Terzo esercizio. (a) Ricordiamo che

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{per } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Posto

$$a_n = \frac{\log n}{n^2},$$

per il limite notevole $(*)$ ($\alpha = 2$), si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Se ne deduce (ancora per un limite visto a lezione)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n = 0.$$

Il limite proposto si presenta dunque nella forma indeterminata $\infty \times 0$. Ancora per un limite notevole studiato, sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Possiamo allora scrivere

$$n \sin \frac{\log n}{n^2} = n \sin a_n = (na_n) \left(\frac{\sin a_n}{a_n} \right).$$

Dato che la successione nella seconda parentesi tende a 1, per il teorema sul limite del prodotto il limite da calcolare è uguale al

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\log n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0,$$

ricordando ancora il limite $(*)$ ($\alpha = 1$).

(b) Ripetendo il ragionamento del punto (a) con la successione (b_n) definita da

$$b_n = \frac{\log n}{n^\beta},$$

anch'essa infinitesima, si vede che il limite da calcolare è uguale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\log n}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^{\beta-1}}.$$

Utilizzando ancora il limite (*), con $\alpha = \beta - 1$, si trova che, se $\beta > 1$, il limite precedente vale 0, mentre se $\beta \leq 1$, esso vale $+\infty$. Pertanto i numeri β che rispondono alla domanda sono tutti e soli i numeri $\beta > 1$.