Corso di Laurea in Informatica
Esame di Calcolo delle Probabilità e Statistica
Primo test di verifica a. a. 2007/2008

Risolvere esattamente due tra gli esercizi seguenti. Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

Primo esercizio. Le città A e B sono collegate da due strade diverse (e non intersecantisi tra loro), che indichiamo con s_1 e s_2. La città B è collegata alla città C da una sola strada, che indichiamo con s_3. Non è possibile andare da A e C se non passando da B. Con probabilità p ognuna delle tre strade può essere interrotta a causa della neve, indipendentemente dalle altre. Per $i = 1, 2, 3$ poniamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{–esima strada non è interrotta} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare la legge di ciascuna delle v.a. X_i.
(b) Per andare da A a C esistono dunque due percorsi, che indichiamo con t_1 (percorrere s_1 e poi s_3) e t_2 (percorrere s_2 e poi s_3). Per $i = 1, 2$ poniamo

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il percorso } t_i \text{ non è interrotto} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esprimere Y_1 e Y_2 in termini di X_i ($i = 1, 2, 3$) e calcolarne le leggi. Y_1 e Y_2 sono v. a. indipendenti?
(c) Calcolare la probabilità che da A si possa raggiungere B sapendo che da A non si può raggiungere C.

Secondo esercizio. Sullo spazio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ siano X e Y due v. a. aventi densità congiunta

$$p(1, 1) = p(-1, 1) = a, \qquad p(1, -1) = p(-1, -1) = b, \qquad p(0, 0) = c,$$

dove a, b e c sono tre numeri non negativi assegnati, con $2a + 2b + c = 1$.
(a) Calcolare le densità marginali di X e di Y.
(b) Calcolare a, b e c in modo che $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.
(c) Calcolare a, b e c in modo che X e Y siano tra loro indipendenti.

Terzo esercizio. (*Modello per la diffusione di un gas proposto da Daniel Bernoulli nel 1769*). Si hanno a disposizione due urne, che denominiamo A e B. Inizialmente l'urna A contiene 3 palline rosse, mentre l'urna B contiene 3 palline bianche. Ad ogni istante, si estrae una pallina da ciascuna delle due urne, e le palline estratte vengono scambiate di urna. Poniamo, per ogni intero i, X_i = numero di palline rosse contenute nell'urna A dopo l'i–esimo scambio.
(a) Calcolare le leggi di X_1 e di X_2.
(b) Calcolare $P(X_3 = 1 | X_2 = 2)$.
(c) Calcolare la legge e la media di X_3.