Esercizi di Analisi Matematica 2017-2018

* ____ *

1. Funzioni trigonometriche

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$
$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha,\quad \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha, \cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha.$
$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha,$

Per $0<\alpha<\pi$
$$\sin\alpha < \alpha$$
e
$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha.$$
Formule di duplicazione
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$
Formule di bisezione
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$
Formule di Werner
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$
Formule di prostaferesi
$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right); \\ \sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \end{cases} \tag{1}$$
Definizione delle funzioni tan e cot,
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
Il dominio per tan e' $\alpha \neq (2k+1)\pi/2, k\in\mathbb{Z}$. Il dominio per cot e' $\alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Espresione di $\sin,\cos$ mediante $\tan,\cot$ e viceversa
$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},\quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$
$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$
$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{-1+\cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}, \quad \cot(\alpha-\beta) = \frac{1+\cot\alpha\cot\beta}{-\cot\alpha+\cot\beta},$$

$$\arcsin x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos x = \alpha, x \in [-1,1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x \ \alpha \in [0, \pi],$$
$$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Problema 1.1. *Calcolare*

$$\sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right) \quad \cos(k\pi), \quad \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

dove $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 1.2. *Verificare le seguente indentita'*

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha,$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha,$$
$$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha, \ \cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(\pi/2-\alpha) = \cot\alpha,$$
$$\sin(\pi/2+\alpha) = \cos\alpha, \ \cos(\pi/2+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \tan(\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\sin(3\pi/2-\alpha) = -\cos\alpha, \ \cos(3\pi/2-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \tan(3\pi/2-\alpha) = \cot\alpha,$$
$$\sin(3\pi/2+\alpha) = -\cos\alpha, \ \cos(3\pi/2+\alpha) = \sin\alpha, \quad \tan(3\pi/2+\alpha) = -\cot\alpha.$$

Problema 1.3. *Verificare le seguente indentita'*

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos(2\alpha), \quad \sin(3\alpha)\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 5\alpha)$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Problema 1.4. *Calcolare* $\cos(2\alpha)$ *se* $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2$.

Risp. $\sqrt{3}/2$.

Problema 1.5. *Dimostrare che*

$$\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta) = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha;$$
$$\sin(2\alpha+\beta) = 5\sin\beta \quad \Rightarrow \quad 2\tan(\alpha+\beta) = 3\tan\alpha.$$

Problema 1.6. *Semplificare le espressioni*

$$a)\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin(2\alpha)},$$

$$b)\sqrt{\sin^2\alpha\ (1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha\ (1+\tan\alpha)}, (\pi < \alpha < 3\pi/2.$$

Risp. a) 1; *b)* $-\sin\alpha - \cos\alpha$.

Problema 1.7. *Dimostrare le identita'*

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$$

$$1 - \cot^2\alpha \ \cot^2\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\beta} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\alpha\cos\gamma} = 0.$$

Problema 1.8. *Per quali valori del parametro a valgono le relazioni*

$$a)\, \sin(\pi - a) = \sin a,$$

$$b)\, \sin a = \sqrt{1-\cos^2 a},$$

$$c)\, \sqrt{1+\sin(2a)} = \sin a + \cos a.$$

Problema 1.9. *Dimostrare che l'identitá $\alpha+\beta+\gamma = \pi/2$ implica*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Problema 1.10. *Dimostrare l'identita'*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x = \frac{\sin 5x/2}{2\sin(x/2)}.$$

Problema 1.11. *Calcolare* $\sin 18^0$.

Problema 1.12. *Dimostrare che*

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Equazioni e Disequazioni trigonometriche

L'equazione

$$\sin x = a.$$

Caso I: Se

$$|a| > 1 \ \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Caso II: Se $|a| \leq 1$, si trova $\alpha_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che $\sin\alpha_0 = a$. Tutti soluzioni sono

$$x = \alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \bigcup \ x = \pi - \alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione

$$\cos x = a.$$

Caso I: Se

$$|a| > 1 \ \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Caso II: Se $|a| \leq 1$, si trova $\alpha_0 \in [0, \pi]$ tale che $\cos\alpha_0 = a$. Tutti soluzioni sono

$$x = \alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \bigcup \ x = -\alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione

$$\tan x = a$$

ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$. Prima si trova $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $\tan\alpha_0 = a$. Tutti soluzioni sono

$$x = \alpha_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione

$$\cot x = a$$

ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$. Prima si trova $\alpha_0 \in (0, \pi)$ tale che $\cot \alpha_0 = a$. Tutti soluzioni sono

$$x = \alpha_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.1. **I tipo:** Le equazioni del tipo $f(\sin x) = 0$, $f(\cos x) = 0$, $f(\tan x) = 0$, dove f é polinomio.

Problema 2.1. *Trovare tutti x tali che*

$$a) 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0;\ b) \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0;\ c)\ 4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0;$$

$$d) \cos x = \frac{1}{2}\tan x;\ \ e)\ 2\cos^2 x + 3\sin x = 0;\ \ f)\ 17\cos x + 12\sin^2 x - 18 = 0;$$

$$g)\ \sin^2(x - 270^\circ) + 2\cos(360^\circ - x) = 3;\ h)\ (\cos x)^{2\sin^2 x - 2\sin x + 1} = 1; i)\ 3\tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x};$$

$$j)\ \sqrt{3}\cot^2 x + (\sqrt{3} - 1)\cot x - 1 = 0;\ \ k)\ \ \tan x + 5\cot x = 6;\ \ \ell)\ \ \sin x = \cos 2x;$$

$$m)\ 2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2};\ n)\ 3(1 - \sin x) = 1 + 2\cos(2x);\ o)\ (1 + \cos x)\cot x = \sin 2x;$$

$$p)\ \ \sin^4 x + \cos^2 2x = 2;\ \ q) \cos 2x + \sin x = 1;$$

$$r)\ \ \tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x};\ \ s) 3\cos^2 x + 2\cos^3 x = 2\cos x.$$

Problema 2.2. *Per quali valori del parametro a l'equazione ha soluzione*

$$a)\ \ \sin^2 x + 2\cos x = a;\ \ b)\ 3\sin x - \cos(2x) + a = 0,$$

2.2. **II tipo:** L'equazione

$$\sin ax \pm \cos ax = 0.$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, Usiamo le formule

$$\sin(ax) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - ax\right); \cos(ax) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm ax\right).$$

L'equazione si riduce a

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\ x\right) = 0, \cup \cos\left(\frac{a+b}{2}\ x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Problema 2.3. *Per quali valori del parametro a l'equazione ha soluzione*

$$a)\ \cos 2x + \sin x = 0;\ b)\ \ \sin 3x - \cos x = 0;\ c)\ \ \sin 5x = \cos 2x;\ d)\ \ \sin 2x = \cos 2x.$$

2.3. **III tipo:** L'equazione

$$a\sin(px) + b\cos(px) = c, a^2 + b^2 \neq 0.$$

L'equazione del tipo $f(x) = c$ dove

$$f(x) = a\sin x + b\cos x$$

si fa la trasformazione

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Se α é angolo tale che

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

allora l'equazione $f(x) = c$ diventa

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Problema 2.4. *Trovare tutti x tali che*

$$a) \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = -\sqrt{3}; \ \sin x + \cos x = 1.$$

2.4. **IV tipo:** Equazioni dove si usano le formulae di prostaferiesi (1).

Problema 2.5. *Trovare tutti x tali che*

$a)$ $\cos 5x = sinx + \cos 3x$; $b)$ $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$; $c)$ $cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$;
$d)$ $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$; $e)$ $\sin 4x - \sin 3x - 2\sin 2x + 3\sin x = 0$, $f)$ $\sin 7x \cos 13x = \sin x \cos 19x$;

$$g) \ \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

2.5. **V tipo:** Equazioni dove si usano le sostituzioni del tipo

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}, \ \cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}; \tag{2}$$

$$\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}; \tag{3}$$

$$\sin x - \cos x = t \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}; \tag{4}$$

Problema 2.6. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$a)$ $\sin x + 2\cot(x/2) = 3$; $b)\sin(2x) + \tan x = 2$, $c))\cot(x/2) - \tan(x/2) = 2\tan x$;
$d)\tan x - \cot x = \dfrac{4}{3}\sin(2x)$; $e)$ $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; $f)$ $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$;

$$g) \ \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 5; \ h) \ \sin^6 x + \cos^6 x = 1.$$

2.6. **VI tipo:** Equazioni omogenei del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0; a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = m.$$

Problema 2.7. *Trovare tutti x tali che*

$a)$ $\sin^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$; $b)$ $3\cos^3 x - \sin^2 x\cos x - \sin x = 0$.

2.7. **VII tipo:** Equazioni dove si usano stime del tipo

$$|\sin x| \leq 1, \ |\cos x| \leq 1.$$

Problema 2.8. *Trovare tutti x tali che*

$$a) \sin 7x + \cos 2x + 2 = 0; \ b) \sin^{17} x + \cos^{17} x = 1; \ c) \ 2^{\log_2(\sin 3x + \cos 2x)} = 2.$$

Problema 2.9. *Trovare tutti x tali che*

$$a) \ \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1; \ b) \ \sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \ c) \ \sin 2x + 2 \cot x = 3;$$

$$d) \ \cos 2x \cot 3x - \sin 2x = \sqrt{2} \cos 5x; \ e) \ 4 \sin 3x + \sin 5x = 2 \sin x \cos 2x;$$

$$f) \ 2 \cot 4x - \cot 2x = \tan x; \ g) \ 3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x;$$

$$h) \sin 8x + \sin 5x + \sin x = \sin 2x; \ i) \ \sqrt{3} \sin x \cos x = 2 - \sin 3x \sin x;$$

$$j) \ \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x; \ k) \ \sin 3x \sin x + \sin 3x \sin 2x = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\ell) \ \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x; \ m) \ 4 \sin^4 x - 2 \cos 2x = 5 \cos^2 x + 2; \ n) \ 8 \cos^4 x - 5 \cos 4x = 3;$$

$$o) \ \cos 4x + 2 \cos^2 x = 1; \ p) \ \cos 2x = 5 \sin x + 3; q) \ 7 \cos \frac{x}{4} - 4 \sin \frac{x}{2} = 4 \cos^3 \frac{x}{4};$$

$$r) \ \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2; \ s) \ \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2};$$

$$t) \ 2 \sin^4 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cos^4 \frac{x}{2}; \ u) \ 8 \cos^4 x - \cos 4x = 1;$$

$$v) \ 3 - 5 \cos^4 x = 3 \sin^4 x; w) \ 8 \sin^4 \frac{x}{3} = 5 - 8 \cos^4 \frac{x}{3}.$$

Problema 2.10. *Trovare tutti x tali che*

$$a) \ \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5; b) \ 3 - 2 \sin^2 2x = 2 \sin^2 x; \ c) \ \cos^2(x - \frac{\pi}{8}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2};$$

$$d) \ 4 \cos^3 \frac{x}{2} + 3\sqrt{2} \sin x = 8 \cos \frac{x}{2}; \ e) \ \tan x + 2 \cot 2x = \cos x + \sin 2x;$$

$$f) \ 8 \cos^2 \frac{x}{2} + 6 \sin^2 \frac{x}{2} = 6 - \sin x; g) \ 2 \cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x);$$

$$h) \ 5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(\sin 2x + 2); \ i) \ (\sqrt{3}+1) \sin^2 x - (\sqrt{3}-1) \sin x \cos x = 1;$$

$$j) \ \sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 3 \cos^3 x = 0; \ k) \ 1 + \sin 2x = \sin x + \cos x;$$

$$\ell) \ \cos x + (\sqrt{2} - 1) \sin 2x = 1 + \sin x; \ m) \ \sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x;$$

$$n) \ \sin 3x + \cos 2x + 2 = 0; \ o) \ 2 - 6^{0,5 + \log_6 \sin x} = 2^{0,5 + \log_2 \cos x};$$

$$p) \ 4^{log_{0,5}(\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}; \ \ q) \ \frac{\sqrt{3} \tan x + 1}{\cos 2x} = 4;$$

$$r) \ 4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \tan x; \ s) \ \tan(\pi \tan x) = \cot(\pi \cot x).$$

3. Disequazioni trigonometriche

La disequazione
$$\sin x > a$$
ha soluzioni
$$\begin{cases} \alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a < -1; \\ x \neq (4k+3)\pi/2, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = -1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a \geq 1, \end{cases} \tag{5}$$
dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\sin x = a$ con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione
$$\sin x \geq a$$
ha soluzioni
$$\begin{cases} \alpha + 2k\pi \leq x \leq \pi - \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a \leq -1; \\ x = (4k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = 1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a > 1, \end{cases} \tag{6}$$
dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\sin x = a$ con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione
$$\sin x < a$$
ha soluzioni
$$\begin{cases} -\pi - \alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a > 1; \\ x \neq (4k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = 1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a \leq -1, \end{cases} \tag{7}$$
dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\sin x = a$ con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione
$$\sin x \leq a$$
ha soluzioni
$$\begin{cases} -\pi - \alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a \geq 1; \\ x = (4k+3)\pi/2, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = -1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a < -1, \end{cases} \tag{8}$$
dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\sin x = a$ con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione
$$\cos x > a$$
ha soluzioni
$$\begin{cases} -\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a < -1; \\ x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = -1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a \geq 1, \end{cases} \tag{9}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\cos x = a$ con $\alpha \in [0, \pi]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione

$$\cos x \geq a$$

ha soluzioni

$$\begin{cases} -\alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a \leq -1; \\ x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = 1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a > 1, \end{cases} \tag{10}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\cos x = a$ con $\alpha \in [0, \pi]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione

$$\cos x < a$$

ha soluzioni

$$\begin{cases} \alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a > 1; \\ x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = 1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a \leq -1, \end{cases} \tag{11}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\cos x = a$ con $\alpha \in [0, \pi]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione

$$\cos x \leq a$$

ha soluzioni

$$\begin{cases} \alpha + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \alpha + 2k\pi, & \text{se } |a| < 1; \\ x \in \mathbb{R}, & \text{se } a \geq 1; \\ x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}, & \text{se } a = -1; \\ x \in \emptyset, & \text{se } a < -1, \end{cases} \tag{12}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\cos x = a$ con $\alpha \in [0, \pi]$ quando $|a| < 1$.

La disequazione

$$\tan x > a$$

ha soluzioni

$$\alpha + k\pi < x < \pi/2 + k\pi, \tag{13}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La disequazione

$$\tan x \geq a$$

ha soluzioni

$$\alpha + k\pi \leq x < \pi/2 + k\pi, \tag{14}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La disequazione

$$\tan x < a$$

ha soluzioni

$$-\pi/2 + k\pi < x < \alpha + k\pi, \tag{15}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La disequazione

$$\tan x \leq a$$

ha soluzioni

$$-\pi/2 + k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi, \tag{16}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La disequazione

$$\cot x > a$$

ha soluzioni

$$k\pi < x < \alpha + k\pi, \tag{17}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\cot x = a$ con $\alpha \in (0, \pi)$.

La disequazione

$$\cot x \geq a$$

ha soluzioni

$$k\pi < x \leq \alpha + k\pi, \tag{18}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (0, \pi)$.

La disequazione

$$\cot x < a$$

ha soluzioni

$$\alpha + k\pi < x < (k+1)\pi, \tag{19}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (0, \pi)$.

La disequazione

$$\tan x \leq a$$

ha soluzioni

$$\alpha + k\pi \leq x < \pi + k\pi, \tag{20}$$

dove α é l'unica soluzione dell'equazione $\tan x = a$ con $\alpha \in (-\pi/2, \pi)$.

Problema 3.1. *Trovare tutti x tali che*

$$a)\ \sin x > \frac{1}{2},\quad b) \sin x > 2;\ c) \sin x > -2;\ d) \sin x < \frac{1}{2};$$

$$e)\ \sin x < 1;\ f)\ \sin x < -2;\ g)\ \sin x < 5;\ h)\ \cos x > \frac{1}{2}; i)\ \cos x > 1; j)\ \cos x > -1;$$

$$k)\ \cos x > -2;\ \ell)\ \cos x < \frac{1}{2}; m)\ \cos x < 1;\ n)\ \cos x < -2;$$

$$o)\ \cos x < -3;\ p)\ \tan x > \sqrt{3};\ q)\ \tan x < 1;\ r)\ \cot x > \frac{1}{\sqrt{3}};\ s)\ \cot x < -1.$$

Problema 3.2. *Trovare tutti x tali che*

$$a)\ 2\sin(\frac{\pi}{4} - x) < \sqrt{3};\quad b) 2\cos(\frac{\pi}{4} + 2x) - \sqrt{3} < 0;\ c)\ \sqrt{3} + \tan(\frac{3\pi}{4} - 2x) < 0;$$

$$d)\ \sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{6} - 3x) > 1;\ e)\ \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \leq \sqrt{2};$$

$$f)\ 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0;\ g) \sin 2x + 3\cos x + \cot x > 0.$$

$\operatorname{sen} x > a$	$\operatorname{sen} x \geq a$	$\operatorname{sen} x < a$	$\operatorname{sen} x \leq a$
① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\alpha+2k\pi < x < \pi-\alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\alpha+2k\pi \leq x \leq \pi-\alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $-\pi-\alpha+2k\pi < x < \alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $-\pi-\alpha+2k\pi \leq x \leq \alpha+2k\pi$
② $a<-1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	② $a\leq-1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	② $a\leq-1$: $x\in\emptyset$	② $a<-1$: $x\in\emptyset$
③ $a=-1$: $\forall x\neq(4k+3)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=1$: $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=1$: $\forall x\neq(4k+1)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=-1$: $x=(4k+3)\frac{\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$
$a\geq1$: $x\in\emptyset$	④ $a>1$: $x\in\emptyset$	④ $a>1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	④ $a\geq1$: $x\in(-\infty,+\infty)$
$\cos x > a$	$\cos x \geq a$	$\cos x < a$	$\cos x \leq a$
① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[0,\pi]$ $-\alpha+2k\pi < x < \alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[0,\pi]$ $-\alpha+2k\pi \leq x \leq \alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[0,\pi]$ $\alpha+2k\pi < x < 2\pi-\alpha+2k\pi$	① $a\in(-1,1)$: $\alpha\in[0,\pi]$ $\alpha+2k\pi \leq x \leq 2\pi-\alpha+2k\pi$
② $a<-1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	② $a\leq-1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	② $a\leq-1$: $x\in\emptyset$	② $a<-1$: $x\in\emptyset$
③ $a=-1$: $\forall x\neq(2k+1)\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=1$: $x=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=1$: $\forall x\neq 2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	③ $a=-1$: $x=(2k+1)\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
④ $a\geq1$: $x\in\emptyset$	④ $a>1$: $x\in\emptyset$	④ $a>1$: $x\in(-\infty,+\infty)$	④ $a\geq1$: $x\in(-\infty,+\infty)$
$\tan x > a$	$\tan x \geq a$	$\tan x < a$	$\tan x \leq a$
$\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ $\alpha+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ $\alpha+k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \alpha+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq \alpha+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
$\cot x > a$	$\cot x \geq a$	$\cot x < a$	$\cot x \leq a$
$\alpha\in(0,\pi)$ $k\pi < x < \alpha+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(0,\pi)$ $k\pi < x \leq \alpha+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(0,\pi)$ $\alpha+k\pi < x < \pi+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	$\alpha\in(0,\pi)$ $\alpha+k\pi \leq x < \pi+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

FIGURE 1. *Tabella delle disequazioni.*

Problema 3.3. *Trovare tutti x tali che*

$$a)\ \cos x \geq \frac{1}{2};\ b)\ \cot x > -\frac{\sqrt{3}}{3};\ c)\ \tan(\frac{3\pi}{4}-x) < -\sqrt{3};$$

$$d)\ \tan(3x-\frac{\pi}{4}) \leq 1;\ e)\ \cot(x+\frac{\pi}{4}) > 1;\ f)\ \cot(-x+\frac{\pi}{4}) \geq \sqrt{3};$$

$$g)\ 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0;\ h)\ 2\sin^2 x + 9\cos x - 6 \geq 0;\ i)\ \cos 2x + \sin x \leq 0;$$

$$j)\ 2\sin^2(x-\frac{\pi}{3}) - 3\cos(x+\frac{\pi}{6}) + 1 \geq 0;\ k)\ 4\sin x\cos x - \sqrt{2} < 2(\sqrt{2}\cos x - \sin x);$$

$$\ell)\ 3\cot 2x + 2\sin 2x \geq 0;\ m)\ 1+\sin x - \cos x \leq \tan x;\ n)\ 3\sin 2x\cos x \leq 2\sin^3 +1;$$

$$o)\ 2\sin^2 x + \sin 3x < 1 + \sin x;\ p)\ \frac{\sin x}{1+\cos x} \geq 0;$$

$$q)\ 8\cos^3 x\sin 3x + 8\sin^3 x\cos 3x < 3;\ r)\ 4^{\sin^2 x} < 2^{2\sin x - 2};\ s)\ \frac{2\tan x}{1+\tan x} + \frac{1}{\tan x} > 2.$$

Problema 3.4. *Trovare tutti x tali che la disequazione*

$$(2\sin x + \sqrt{2})y^2 - 4y + 2\sin x > 0$$

é vera per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Problema 3.5. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin x} > 2.$$

Problema 3.6. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}.$$

Problema 3.7. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$4(\sin^2 x - |\cos x|) < 1.$$

Problema 3.8. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|\sin x + \cos x| < 1.$$

Problema 3.9. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right| \leq 1.$$

Problema 3.10. *Trovare tutti $x \in \mathbb{R}$ tale che*

$$2^{\sin x} > 2^{\cos x}.$$

Funzione arcsin, arccos, arctan, ln

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ é crescentese se

$$f(x_1) < f(x_2)$$

per ogni due numeri $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ é decrescentese se

$$f(x_1) > f(x_2)$$

per ogni due numeri $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$.

La funzione $\sin\alpha$ é crescente per $\alpha \in I = [-\pi/2, \pi/2]$. L'imagine e $J = [-1, 1]$. Allora la funzione inversa é $\arcsin x$ con dominio $J = [-1, 1]$ e l'imagine $I = [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\arcsin x = \alpha, x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \sin\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2].$$

La funzione $\cos\alpha$ é decrescente per $\alpha \in I = [0, \pi]$. L'imagine é $J = [-1, 1]$. Allora la funzione inversa é $\arccos x$ con dominio $J = [-1, 1]$ e l'imagine $I = [0, \pi]$.

$$\arccos x = \alpha, x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \cos\alpha = x \ \alpha \in [0, \pi],$$

La funzione $\tan\alpha$ é crescente per $\alpha \in I = (-\pi/2, \pi/2)$. L'imagine é $J = [-\infty, \infty]$. Allora la funzione inversa é $\arctan x$ con dominio $J = (-\infty, \infty)$ e imagine $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

$$\arctan x = \alpha, x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \tan\alpha = x \ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2],$$

La funzione e^x é crescente per $x \in I = (-\infty, \infty)$. L'imagine e $J = (0, \infty)$. Allora la funzione inversa é $\ln x$ con dominio $J = (0, \infty)$ e imagine $I = (-\infty, \infty)$.

Problema 3.11. *Trovare l'imagine e la inversa (se esiste) delle funzione*
a) $f(x) = 1 + 2/x$ *con dominio* $(0, 1)$.
b) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$ *con dominio* $I = (-1, 1))$.

Problema 3.12. *Per quale intervallo* $I \subseteq \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x) = x + |x^2 - 1|$ *con dominio* I *é invertibile ?*

4. Numeri Complessi

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non puo' avere soluzioni reali dato che non ha senso (nel campo dei numeri reali) considerare $\sqrt{-1}$. Tuttavia l'equazione scritta sopra ha soluzione se ampliamo l'insieme dei numeri reali con l'aggiunta dell'unita' immaginaria $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ che gode della proprieta'

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{21}$$

Una volta introdotta l'unita' immaginaria si definisce insieme dei numeri complessi

$$\mathbf{C} \equiv \{z = x + \mathbf{i}y, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Se $z = x + \mathbf{i}y$ con $x, y \in \mathbf{R}$, allora x ed y si chiamano ripettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso z e si indicano con $\mathcal{R}e\ z$ ed $\mathcal{I}m\ z$.

La somma e la moltiplicazione tra numeri complessi segue le stesse regole della moltiplicazione tra numeri reali, tenendo conto del fatto che per l'unita' immaginaria $\mathbf{i}$ vale la regola (21). Quindi

$$x + \mathbf{i}y + x' + \mathbf{i}y' = (x + x') + \mathbf{i}(y + y')$$

$$(x + \mathbf{i}y)(x' + \mathbf{i}y') = xx' + \mathbf{i}xy' + \mathbf{i}x'y + \mathbf{i}^2yy' = (xx' - yy') + \mathbf{i}(xy' + x'y).$$

Dato $z = x + \mathbf{i}y$ si definisce

$$\bar{z} = x - \mathbf{i}y$$

e

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Si puo' anche definire il rapporto tra numeri complessi come segue:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

(notare che il secondo membro ha senso visto che la moltiplicazione dei tre numeri $z, \bar{w}, \frac{1}{|z|^2}$ si puo' fare seguendo la regola di prodotto descritta sopra).

Ogni numero complesso $z = x + \mathbf{i}y$ e' individuato da due numeri reali (la parte reale e la parte immaginaria). Pertanto i numeri complessi possono essere individuati da un punto nel piano cartesiano $x-y$. D'altra parte ogni punto (x, y) del piano puo' essere individuato in coordinate polari dalla distanza del punto dall'origine ρ e dall'angolo θ formato tra l'asse delle x e la semiretta passante per il punto (x, y) e l'origine.

Pertanto se $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ (osservare che θ e' definito a meno di un multiplo intero di 2π) allora

$$x + \mathbf{i}y = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta).$$

Una notazione utile e'

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta,$$

e pertanto ogni numero complesso $x + \mathbf{i}y$ si puo' sempre esprimere in coordinate polari ed in forma compatta come segue:

$$x + \mathbf{i}y = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$$

dove θ definito a meno di $2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Inoltre si ha che

$$z^n = \rho^n e^{\mathbf{i}n\theta} \text{ se } z = \rho e^{\mathbf{i}\theta} \tag{22}$$

(vedi esercizio (4.6)).

Un numero complesso z' si dice essere una radice n-esima del numero complesso z se $z'^n = z$.

In particolare se $z = \rho e^{\mathbf{i}(\theta+2k\pi)}$ e $z' = \rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ e' una radice n-esima di z allora si ha per definizione che

$$\rho e^{\mathbf{i}(\theta+\mathbf{2k}\pi)} = (\rho')^n e^{\mathbf{i}n\theta'}$$

dove abbiamo usato (22).

In particolare si ha che le radici n-esime di $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ sono tutti e soli i numeri complessi del tipo $\rho' e^{\mathbf{i}\theta'}$ dove $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta' = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Esempio Calcolare $\sqrt{-1}$. Osserviamo che in base all'interpretazione geometrica dei numeri complessi si ha che $-1 = e^{\mathbf{i}(\pi+2k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$ e quindi tutte le radici di -1 sono del tipo $e^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Data la periodicita' di $e^{\mathbf{i}\theta}$ si ha che le uniche radici distinte di -1 possono essere individuate dai numeri $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$ e $e^{\mathbf{i}\pi\frac{3}{2}}$ che possono essere scritte in coordinate cartesiane come $\mathbf{i}$ e $-\mathbf{i}$.

Problema 4.1. *Provare che* $|z|^2 = z.\bar{z}$ *per ogni numero* $z \in \mathbf{C}$.

Problema 4.2. *Calcolare*

$$\frac{3i-2}{i-2} + \frac{i-3}{1-2i} + \frac{(1-i)(i-2)}{(2i+1)^2}.$$

Problema 4.3. *Dati i numeri complessi* $z = x + \mathbf{i}y$ *e* $w = x' + \mathbf{i}y'$ *(*w *si suppone diverso dal numero complesso nullo) esprimere la parte reale e la parte immaginaria di* $\frac{z}{w}$.

Problema 4.4. *Provare che*

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

per ogni coppiae di numeri $z, w \in \mathbf{C}$.

Problema 4.5. *Dato il numero complesso* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ *calcolare* $|z|^2$.

Problema 4.6. *Esprimere in coordinate polari il numero* z^n *dove* $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$.

Problema 4.7. *Simplificare l'espressione*

$$\frac{z^3-1}{z-1} + \overline{\frac{z^3-1}{z-1}}$$

dove $z = e^{i\theta}$.

Problema 4.8. *Calcolare*

$$z^4 + 1/z^4$$

se $z + 1/z = 1$.

Problema 4.9. *Calcolare*

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

per $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4.10. *Calcolare* $\sqrt[6]{\mathbf{i}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{3}+\mathbf{i}}, \sqrt[3]{3+3\mathbf{i}}$.

Problema 4.11. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^n = z.$$

Problema 4.12. *Risolvere l'equazione* $\bar{z}^3 z^4 = -2z^2$.

Problema 4.13. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^n = \bar{z}.$$

Problema 4.14. *Trovare tutti i numeri complessi tali che*

$$z^2 - |\bar{z} - 3| - 3 = 0.$$

Suggerimento. Usare la forma cartesiana $z = x + iy$.

Problema 4.15. *Trovare tutte le coppie di numeri complessi* z, w *tali che*

$$\bar{z}^2 - w^2 = -1,$$
$$\bar{w}^2 - z = 0.$$

Problema 4.16. *Esrpimere in coordinate polari il numero complesso*

$$1 + \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

Problema 4.17. *Siano* $z_1, ..., z_n$ *le radici* n*-esime di* 1. *Calcolare* $z_1 + ... + z_n$ *e* $z_1 \times ... \times z_n$.

Problema 4.18. *Scrivere in forma compatta i numeri* $(1+i)^n + (1-i)^n$, *con* $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4.19. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *tali che* $|a| = |b| = |c| = 1$. *Provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e' equilatero se e solo se* $a + b + c = 0$.

Problema 4.20. *Siano dati* $a, b, c \in \mathbb{C}$, *provare che il triangolo di vertici* a, b, c *e'equilatero se e solo se* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Problema 4.21. *Rappresentare graficamnete il seguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*

$$\{|z-1| = |z+1|, z \in \mathbf{C}\}.$$

Problema 4.22. *Se* $w \in \mathbb{C}$ *é un numero complesso tale che* $|w| < 1$ *verificare l'affermazione*

$$|z| < 1 \Longleftrightarrow \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}\, z} \right| < 1.$$

Problema 4.23. *Rappresentare graficamnete ils eguente sottoinsieme di* $\mathbf{C}$*:*

$$\{z + \bar{z} = |z|^2, z \in \mathbf{C}\}.$$