Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2009/2010

ESERCITAZIONE 4.2

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

• Si consideri un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Proposizione	Vera	Falsa
$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle\ \forall v, w$	•	☐
$\langle v, w\rangle \geq 0\ \forall v, w$	☐	•
$\langle v, v\rangle \geq 0\ \forall v$	•	☐
$\langle 2v, w\rangle = 2\langle v, w\rangle$	•	☐
$\langle 2v, w\rangle = 4\langle v, w\rangle$	☐	•
$\langle 2v_1 + 3v_2, w\rangle = 2\langle v_1, w\rangle + 3\langle v_2, w\rangle$	•	☐
Se $\langle v, v\rangle = 4$ allora $\langle 2v, 2v\rangle = 8$	☐	•
Se $\langle v, v\rangle = 4$ allora $\langle 2v, 2v\rangle = 16$	•	☐

• Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

(i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

$M_1 = a_{11} = 1 > 0$; $\det(M_2) = \det(A) = 7 > 0$. Per il criterio dei minori principali il prodotto scalare è definito positivo.

• Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

(i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$

Il coefficiente $a_{11} = 0$ corrisponde al prodotto scalare $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Pertanto il vettore cercato è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_2y_2$

(i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$.

Il prodotto scalare $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1$. Il prodotto scalare $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -2$. Cerchiamo quindi il vettore v come combinazione lineare dei due vettori della base canonica, $v = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Poichè $\langle v,v\rangle = 0$ se e solo se anche $\langle \lambda v, \lambda v\rangle = 0$, (dividendo i coeff. per λ_1) possiamo porre $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$.

Sia quindi $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. Allora $\langle v,v\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}\rangle = 1 + t^2(-2)$.

Quindi $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow 1 + t^2(-2) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}/2$

RISPOSTA: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

(iiia). Determinare un vettore w tale che $\langle v,v\rangle = 5$;

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle = 1 > 0$. Quindi cerchiamo un multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia $w = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\langle w,w\rangle = \langle \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}\rangle = s^2$.

Quindi $\langle w,w\rangle = 5 \Leftrightarrow s^2 = 5 \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{5}$

RISPOSTA: $w = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iiib). Determinare un vettore z tale che $\langle z,z\rangle = -3$.

$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = -2 < 0$. Quindi cerchiamo un multiplo di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $z = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$.

Allora $\langle z,z\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}\rangle = -2 \cdot r^2$.

Quindi $\langle z,z\rangle = -3 \Leftrightarrow r^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

RISPOSTA: $z = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

- Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

(i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v,v\rangle = 0$.
Il prodotto scalare è indefinito perchè $\det(A) < 0$ (n.b. A è 2×2.)
Pertanto un vettore v non nullo tale che $\langle v,v\rangle = 0$ deve esistere.

Come nell'esercizio precedente poniamo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, e cerchiamo per quali valori del parametro t il prodotto scalare $\langle v,v\rangle = 0$.

$\langle v,v\rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}\rangle = 1 + 4t + t^2$. Quindi $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow 1 + 4t + t^2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \sqrt{3}$

RISPOSTA: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ oppure $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

• Per ciascuna delle seguenti matrici A_i si consideri il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle_i = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \cdot A_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare in quali casi il prodotto scalare è nondegenere, definito positivo, definito negativo, indefinito.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non degenere

definito positivo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non degenere

indefinito

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

non degenere

indefinito

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

degenere

Esercizio 1. Data la forma $\mathrm{f}_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori del parametro t f_t è un prodotto scalare.

La forma f_t è un prodotto scalare se e soltanto se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è simmetrica, ovvero se e solo se $t = 1$.

Esercizio 2.

Data la forma $\mathrm{f}_{t,s} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_{t,s}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare per quali valori dei parametri t, s $\mathrm{f}_{t,s}$ è un prodotto scalare.

La forma $\mathrm{f}_{t,s}$ è un prodotto scalare se e soltanto se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & s \end{pmatrix}$ è simmetrica,

ovvero se e solo se $t = 1$, s qualsiasi.

(ii) Determinare per quali valori dei parametri t, s $\mathrm{f}_{t,s}$ è un prodotto scalare definito positivo.

Applichiamo il criterio dei minori principali alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}$.

$M_1 = a_{11} = 1 > 0$. $\det(M_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$. $\det(M_3) = \det(A) = s - 1$. Quindi

$$\begin{cases} M_1 > 0 \\ \det(M_2) > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \iff s - 1 > 0 \Leftrightarrow s > 1. \qquad \text{RISPOSTA:} t = 1, s > 1.$$

Esercizio 3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{f}_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma

$$\mathrm{f}_\alpha(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + \alpha \cdot x_1y_2 + \alpha^2 \cdot x_2y_1 + x_2y_2$$

(i) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è un prodotto scalare

La forma f_α è un prodotto scalare se e soltanto se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica, ovvero se e solo se $\alpha = \alpha^2$, cioè $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$.

(ii) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è un prodotto scalare non degenere.

Per il punto (i) dobbiamo considerare i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Per $\alpha = 0$ la matrice associata al prodotto scalare è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ha $a_{11} > 0, \det(A) > 0$, quindi in questo caso il prodotto scalare è definito positivo.

Per $\alpha = 1$ la matrice associata al prodotto scalare è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ha $\det(A) = 0$, quindi in questo caso il prodotto scalare è degenere e quindi non può essere definito.

Esercizio 4. Al variare del parametro reale t si consideri il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A_t = \begin{pmatrix} 8 & t & 2 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è non degenere.
Il prodotto scalare è non degenere se soltanto se $\det(A_t) \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 8 & t & 2 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2t^2 + 12t \neq 0 \Longleftrightarrow t \neq \pm\sqrt{6}.$$

(ii) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è definito positivo.
Applichiamo il criterio dei minori principali alla matrice A_t.

$M_1 = a_{11} = 8 > 0$. $\det(M_2) = \det \begin{pmatrix} 8 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} = 8 - t^2$. $\det(M_3) = \det(A) = -2t^2 + 12t$.

Quindi dobbiamo imporre le tre condizioni

$$\begin{cases} M_1 = 8 > 0 \\ \det(M_2) = 8 - t^2 > 0 \\ \det(A) = -2t^2 + 12t > 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema di disequazioni è : $\quad -\sqrt{6} < t < +\sqrt{6}$.

Esercizio 5. Al variare del parametro reale t si consideri il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1+2t & t & -2 \\ t & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è non degenere.
Il prodotto scalare è non degenere se soltanto se $\det(A_t) \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1+2t & t & -2 \\ t & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2t^2 - 4t + 2 \neq 0 \Longleftrightarrow t \neq -1 \pm \sqrt{2}.$$

(ii) Dimostrare che per ogni t esiste almeno un vettore isotropo (non nullo).
Un vettore v non nullo si dice isotropo per il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ se $\langle v, v \rangle = 0$.

Guardando i coefficienti sulla diagonale della matrice A osserviamo che prodotto scalare $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = -1$, mentre il prodotto scalare $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = +2$. Cerchiamo quindi il vettore v come combinazione lineare dei due vettori, $v = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Poichè $\langle v, v\rangle = 0$ se e solo se anche $\langle \lambda v, \lambda v\rangle = 0$, (dividendo i coeff. per λ_1) possiamo porre $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t$.

Sia quindi $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$. Allora $\langle v, v\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \rangle = -1 + 2t^2$.

Quindi $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow -1 + 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}/2$

RISPOSTA: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2 e sia $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ l' applicazione definita da

$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle \ = \ \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x)\ dx$$

(i) Dimostrare che $\langle\ ,\ \rangle$ è un prodotto scalare.
La forma $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà:
(1) SIMMETRIA :
$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle \ = \ \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x)\ dx = \ \int_0^1 p_2(x) \cdot p_1(x)\ dx = \langle p_2(x), p_1(x)\rangle$
(2)BILINEARITÀ:
$\langle \lambda_1 p_1(x) + \mu_1 q_1(x), p_2(x)\rangle \ = \ \int_0^1 \lambda_1(p_1(x) + \mu_1 q_1(x)) \cdot p_2(x)\ dx =$
$= \ \lambda_1 \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x) \ \ dx + \mu_1 \int_0^1 q_1(x) \cdot p_2(x)\ dx = \lambda_1\langle p_1(x), p_1(x)\rangle + \mu_1\langle q_1(x), p_1(x)\rangle$
(ii) Rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ determinare la matrice associata a $<\ ,\ >$.
Il coefficiente di posto $(1, 1)$ è dato dal prodotto scalare $\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1dx = 1$.
Il coefficiente di posto $(1, 2)$ è dato dal prodotto scalare $\langle 1, x\rangle = \int_0^1 1 \cdot xdx = \frac{1}{2}$.
Il coefficiente di posto $(2, 2)$ è dato dal prodotto scalare $\langle x, x\rangle = \int_0^1 x \cdot xdx = \frac{1}{3}$.
etc...

Quindi la matrice associata è : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

(iii) Dimostare che $\langle\ ,\ \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.
Si può applicare il criterio die minori principali alla matrice A
Oppure osservare che per qualsiasi polinomio $p(x)$ non identicamente nullo

$$\langle p(x), p(x)\rangle \ = \ \int_0^1 [p(x)]^2\ dx > 0$$

poichè $[p(x)]^2$ eè una funzione continua, sempre positiva, che assume almeno un valore diverso da 0.