Ingegneria Gestionale - Corso di Analisi II e Algebra

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 3.2

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ iniettiva	•	☐
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ iniettiva	•	☐
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ iniettiva	☐	•
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ surgettiva	☐	•
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ surgettiva	•	☐
Esiste un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ surgettiva	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare $\Rightarrow f$ iniettiva	☐	•
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare $\Rightarrow f$ surgettiva	☐	•
f inettiva $\Rightarrow Ker(f) = \{0_V\}$	•	☐
$Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ iniettiva	•	☐
$Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow f$ surgettiva	☐	•
Esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\dim Ker(f) = \dim Im(f)$	•	☐
Esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim Ker(f) = \dim Im(f)$	☐	•
Esiste $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim Ker(f) = \dim Im(f)$	•	☐

- Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{allora :} \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{determinare } f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

- Date le seguenti applicazioni lineari, determinarne la matrice associata rispetto alle basi canoniche:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare .

Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinare $f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

SOLUZIONE. Poiché si ha $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e f è lineare si deduce che

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

• Determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE. Rispetto alle basi canoniche (in partenza e arrivo) le colonne della matrice A rappresentano le immagini attraverso la funzione f dei vettori della base canonica.

La prima colonna è $= f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la seconda colonna è $= f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rispetto alle basi canoniche la matrice associata ad f è una matrice 2×2. La prima colonna della matrice è data dalle ipotesi dell'esercizio. La seconda dobbiamo trovarla sfruttando la seconda condizione.

Ovvero $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ con α, β da determinare e l'applicazione f è data dal prodotto matrice $\times$ vettore

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La seconda condizione $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si traduce in $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ che equivale al sistema

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 \cdot \alpha = 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot \beta = 1 \end{cases}$$

Pertanto si evince che $\alpha = -1$, $\beta = -1$, ovvero che la matrice è la seguente: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

• Determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE. Il procedimento è analogo a quello dell'esercizio precedente. Rispetto alle basi canoniche (in partenza e arrivo) le colonne della matrice A rappresentano le immagini attraverso la funzione f dei vettori della base canonica.

La prima colonna è $= f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la seconda colonna è $= f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la terza colonna è $= f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rispetto alle basi canoniche la matrice associata ad f è una matrice 2×3. La prima e la seconda colonna della matricesono data dalle ipotesi dell'esercizio. La terza dobbiamo trovarla sfruttando la seconda condizione.

Ovvero $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ con α, β da determinare e l'applicazione f è data dal prodotto matrice $\times$ vettore

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&\alpha\\1&1&\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

La terza condizione $f\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}$ si traduce in $\begin{pmatrix}2&4&\alpha\\1&1&\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}3\cdot 2+3\cdot 4+3\cdot\alpha=9\\3\cdot 1+3\cdot 1+3\cdot\beta=9\end{cases}$$

Pertanto si evince che $\alpha=-3$, $\beta=1$, ovvero che la matrice è la seguente: $A=\begin{pmatrix}2&4&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$

- Determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla seguente applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che
$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix}$$

SOLUZIONE. Il procedimento è analogo a quello dei due esercizi precedenti. Rispetto alle basi canoniche (in partenza e arrivo) le colonne della matrice A rappresentano le immagini attraverso la funzione f dei vettori della base canonica.

La prima colonna è $=f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, la seconda colonna è $=f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, la terza colonna è $=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Rispetto alle basi canoniche la matrice associata ad f è una matrice 3×3. La prima e la seconda colonna della matricesono data dalle ipotesi dell'esercizio. La terza dobbiamo trovarla sfruttando la seconda condizione.

Ovvero $A=\begin{pmatrix}2&4&\alpha\\1&1&\beta\\2&0&\gamma\end{pmatrix}$ con α,β,γ da determinare e l'applicazione f è data dal prodotto matrice $\times$ vettore

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&\alpha\\1&1&\beta\\2&0&\gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

La terza condizione $f\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix}$ si traduce in $\begin{pmatrix}2&4&\alpha\\1&1&\beta\\2&0&\gamma\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix}$ che equivale al sistema

$$\begin{cases}3\cdot 2+3\cdot 4+3\cdot\alpha=9\\3\cdot 1+3\cdot 1+3\cdot\beta=9\\3\cdot 2+\qquad +3\cdot\gamma=9\end{cases}$$

Pertanto si evince che $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\gamma=1$ ovvero che la matrice è la seguente: $A=\begin{pmatrix}2&4&-3\\1&1&1\\2&0&\gamma\end{pmatrix}$

• Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche
ii) Determinare una base di $Im(f)$ ed uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$.

SOLUZIONE. i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

L'immagine di f è generata dai due vettori colonna della matrice: $Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Essendo i due vettori linearmente indipendenti allora una base di $Im(f)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) Lo spazio W deve avere dimensione = 3-2=1, ovvero $W = \langle w \rangle$, ed inoltre l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w \right\}$ deve essere una base di $\mathbb{R}^3$. Basta prendere $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

• Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche
ii) Determinare una base di $Im(f)$ ed uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(f)$.

SOLUZIONE. i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

L'immagine di f è generata dai due vettori colonna della matrice: $Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Essendo i due vettori linearmente indipendenti allora una base di $Im(f)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) Lo spazio W deve avere dimensione = 3-2=1, ovvero $W = \langle w \rangle$, ed inoltre l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w \right\}$ deve essere una base di $\mathbb{R}^3$. Basta prendere $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

- Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.
ii) Determinare una base di $Ker(f)$ ed uno spazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Ker(f)$.

SOLUZIONE. i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Per determinare il $Ker(f)$ di f occorre risolvere il sistema $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_2 = t$ parametro. Si ha $x_3 = 4x_2 = 4t$, $x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -3t$.

Pertanto una base del $Ker(f)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

ii) Lo spazio W deve avere dimensione = 3-1=2, ovvero $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, ed inoltre l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, w_1, w_2 \right\}$ deve essere una base di $\mathbb{R}^3$. Basta prendere $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

- Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.
ii) Determinare una base di $Ker(f)$ ed una di $Im(f)$.
iii) Dire se $\mathbb{R}^3 = Im(f) \bigoplus Ker(f)$.

SOLUZIONE. i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

ii) L'immagine di f è generata dai due vettori colonna della matrice: $Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$.

Per vedere se i tre vettori sono lineramente indipendenti calcoliamo $\det(A)$.

$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$. Quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. I primi due sono indipendenti, pertanto $\dim(Im(f) = 2$ e una una base di $Im(f)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Per il teorema della dimesione si ha $\dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$.

Per determinare il $Ker(f)$ di f occorre risolvere il sistema $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_2 = t$ parametro. Si ha $x_3 = 4x_2 = 4t$, $x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -3t$.

Una base del $Ker(f)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

iii) Si ha $\dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$, $\dim(Im(f) = 2$, pertanto $\mathbb{R}^3 = Im(f) \bigoplus Ker(f)$ se l'unione delle due basi da' una base di $\mathbb{R}^3$.

Ciò si verifica se e soltanto se i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Calcolando il determinate della matrice coostituita dai tre vettori si ha det $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = 24 \neq 0$ quindi $\mathbb{R}^3 = Im(f) \bigoplus Ker(f)$.