Corso di Algebra

Ingegneria Gestionale

Soluzioni ESERCITAZIONE 3.5

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A matrice 3×3, $\Rightarrow$ A^t matrice 3×3	•	
A matrice triangolare inferiore $n \times n$ $\Rightarrow$ A invertibile		•
A matrice triangolare superiore $\Rightarrow$ A^t matrice triangolare inferiore	•	☐
A matrice 3×3, $A = A^t$ $\Rightarrow$ $A = 0$	☐	•
A, B matrici triangolari superiori 3×3, $\Rightarrow$ $A \cdot B$ matrice triangolare superiore	•	☐
A matrice triangolare inferiore $n \times n$ $\Rightarrow$ $\det(A) = a_{11} \cdot ... \cdot a_{nn}$	•	☐
A matrice triangolare superiore invertibile $\Rightarrow$ A^{-1} matrice triangolare superiore	•	☐
A matrice $n \times n$ t.c. $A^n = Id$ $\Rightarrow$ A invertibile	•	
A matrice 4×3, B matrice 3×4 $\Rightarrow$ $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$	☐	•
A matrice 4×3, B matrice 3×4 $\Rightarrow$ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$	•	☐

SECONDA PARTE

Esercizio 1. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Risposte. $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (A{\cdot}B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^t{\cdot}B^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (B{\cdot}A)^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 2.

$A= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1}= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1}= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Risposte. $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Risposte. $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 5.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

(i) Determinare , se esiste, un vettore $X \in \mathbb{R}^2$ tale che $A \cdot X$ è il vettore nullo.

Risposta. Si tratta di determinare un vettore del Ker di f. Poichè il determinante della matrice è nullo (ed infatti si ha II riga =-2 I riga) tale vettore esiste . Per trovarlo è sufficiente risolvere

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$$

Ovvero basta prendere ad esempio $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare , se esiste, una matrice B non nulla tale che $A \cdot B$ è la matrice nulla .

Risposta. In questo caso basta prendere una matrice costtuita da due vettori colonna appartenenti al Ker. Ad esempio $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$