Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2008/2009

Compitino n.3 20/4/2009

TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 risposta sbagliata = -2

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A matrice 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	☐	•
v_1, v_2 sono autovettori per $f \Rightarrow v_1+v_2$ è autovettore per f	☐	•
La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$ è un prodotto scalare	☐	•

- In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta r passante per A e B.

(i)il punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in r$?

	falso

- Il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

è:

definito positivo		

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ la molteplicità geometrica dell'autovalore 9 è = 3

- Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{pmatrix}$

se $t = 2$

- In $\mathbb{R}^3$ determinare un' equazione intrinseca del piano passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, e perpendicolare a $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$6x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 28 = 0$$

SECONDA PARTE

Esercizio 1. [punteggio: 0-5]

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

$\lambda_1 = 2 \quad m.a.(2) = 2\ ; \quad m.g.(2) = 1$

$\lambda_2 = 3 \quad m.a.(3) = 2\ ; \quad m.g.(3) = 2$

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

AUTOVETTORI RELATIVI A $\lambda_1 = 2$: $\{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$

AUTOVETTORI RELATIVI A $\lambda_2 = 3$: $\{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R}, (t, s) \neq (0, 0)\}$

(iii) Si dica se f è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

f è triangolarizzabile. f non è diagonalizzabile perchè $m.a.(2) > m.g.(2)$

Esercizio 2. [punteggio: 0-3]

Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$P_{CAR}(\lambda) = (4 + \lambda)(\beta^2 - \lambda^2)$.

• Quindi se $\beta \neq 0, -4$ si hanno 3 autovalori reali distinti: $-4, \beta, \beta$. Pertanto in questo caso A è diagonalizzabile. A è diagonalizzabile.

• Se $\beta = -4$ si ha $\lambda = -4$ autovalore con molteplicità algebrica =2. Vediamo $m.g.(-4)$:

$$\mathrm{r}k(A - (-4 \cdot \mathbf{Id})) = \mathrm{r}k \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow m.g.(-4) = 3 - 2 = 1 \neq m.a.(-4)$$

Se $\beta = -4$ la matrice non è diagonalizzabile.

• Se $\beta = 0$ si ha $\lambda_1 = -4$ autovalore con molteplicità algebrica =1 , quindi con $m.g.(-4) = 1$, e $\lambda_2 = 0$ autovalore con molteplicità algebrica =2. Vediamo $m.g.(0)$:

$$\mathrm{r}k(A - (0 \cdot \mathbf{Id})) = \mathrm{r}k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow m.g.(-4) = 3 - 1 = 2 = m.a.(0)$$

In questo caso si ha $m.a.(-4) = 1 = m.g.(-4)$; $m.a.(0) = 2 = m.g.(0)$, quindi la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]

Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 3x_2y_2$

(i) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$: $\quad v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = -4$: $\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Esercizio 4. [punteggio: 0-3]
Data la forma $\mathrm{f}_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) \cdot \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori del parametro t f_t è un prodotto scalare definito positivo.
Applicando il criterio dei minori principali il prodotto scalare è definito positivo se e solo se:

$$\begin{cases} t > 0 \\ t - 1 > 0 \\ t^2 - 5t > 0 \end{cases} \qquad \text{Soluzione: } t > 5.$$

Esercizio 5. [punteggio: 0-2] Determinare la posizione reciproca (coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti, sghembe) per la seguente coppia di rette di $\mathbb{R}^3$.

$$r \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad s \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è $= \emptyset$, l'insieme vuoto.

Il vettore direttore di r è : $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore direttore di s è : $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Quindi le due rette sono sghembe