Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

SOLUZIONE della prova scritta del 22-2-2005

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{3z} + e^{z+2} = 0 \\ i(\overline{z} - z) > 0 \end{cases}$$

Soluzione .
(i) : La prima equazione diventa

$$e^{3z} = -e^{z+2} = e^{i\pi+z+2}$$

Tale uguaglianza è verificata se e soltanto se

$$3z = z + 2 + i\pi + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ponendo $z = x + iy$ e uguagliando la parte immaginaria e la parte reale otteniamo:

$$\begin{cases} 3x = x + 2 \\ 3y = y + i\pi + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La soluzione della prima equazione è data da

$$z = 1 + i(\frac{\pi}{2} + k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

(ii) : Posto $z = x + iy$ si ha $\overline{z} = x - iy$. Pertanto la seconda condizione diventa

$$\begin{aligned} &i((x - iy) - (x + iy)) > 0 && \Leftrightarrow \\ &i(-2iy) > 0 && \Leftrightarrow \\ &y > 0, \quad x = \text{qualsiasi} \end{aligned}$$

CONCLUSIONE: La soluzione è data da $z = 1 + i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, , con $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq 0$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +3x_2 & -2x_3 \\ 2x_1 & +2x_2 & \\ -x_1 & & -x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \in \Big[W \cap (Im(f)) \Big]$.

Soluzione .

(i) : Sia A la matrice associata, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

In questo caso A è una matrice 3×3. È molto conveniente per prima cosa deteminare il rango di A.

Per determinare il rango calcoliamo il determinante di A: $\det(A) = ... = 0$. Quindi, poichè A è una matrice 3×3, $\mathrm{r}k(A) \leq 2$. Inoltre il minore ottenuto eliminando la terza riga e la terza colonna ha determinante diverso da zero.

Pertanto il rango di A è =2.

Per il teorema della dimensione la dimensione del nucleo è $= 1$.

Per determinarte una base di $Im(f)$, per quanto visto prima, è sufficiente considerare le prime colonne della matrice.

$$BASE \ di \ \ Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per determinare una base del Ker occorre risolvere l'equazione $A \cdot X = O_V$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ -x_1 & & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l'algoritmo di Gauss otteniamo

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -4x_2 & +4x_3 & = 0 \\ & 3x_2 & -3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Il sistema è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = t$, si ha $x_2 = t$ e quindi $x_1 = -t$.

Ponendo $t = 1$ una base del nucleo è data da

$$BASE \ di \ \ Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Sia $(A|b_t)$ la matrice completa associata al sistema, , $(A|b_t) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & t \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

Osserviama che per quanto visto al punto (i) il rango di A è =2. Quindi avremo soluzione del sistema solamente se anche il rango di $(A|b_t)$ =2.

Consideriamo il minore ottenuto eliminando la terza colonna: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & t \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si ha $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 4$.

Quindi se $t \neq 4$ si ha $3 = \mathrm{r}k(A|b_t) > 2 = \mathrm{r}k(A)$ e quindi, per il teorema di Rouchè Capelli, non esiste soluzione del sistema.

Analizziamo il caso $t = 4$.

La matrice $(A|b_4)$ diventa , $(A|b_t) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

In questo caso la colonna $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = I$ colonna $+II$ colonna.

Quindi in questo caso si ha effettivamente l' uguaglianza dei ranghi e allora esiste almeno una soluzione del sistema (piu' precisamente ve ne sono infinite).

(iii) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;:\; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Un vettore appartenente all' immagine di f lo possiamo scrivere come combinazione lineare dei vettori costituenti la base di $Im(f)$, pertanto per quanto visto al punto (i), un vettore $v \in Im(f)$ possiamo esprimerlo come

$$v = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Poichè W è descritto da un'equazione per determinare gli eventuali valori di α e β è sufficiente sostituire $x_1 = \alpha + 3\beta$, $x_2 = 2\alpha + 2\beta$, $x_3 = -\alpha$ nell'equazione di W.

Si ottiene allora:

$$(\alpha + 3\beta) + (2\alpha + 2\beta) - 2(-\alpha) == 0 \leftrightarrow 5\alpha + 5\beta = 0$$

ovvero $\alpha = -\beta$.

Ponendo $\beta = 1$ si ottiene $\alpha = -1$, e quindi un vettore appartenente all'intersezione dei due sottospazi è

$$w = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Si dica se $Ker(f) = Im(f)$.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di A è
$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$. Sviluppando rispetto alla I colonna otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 1\cdot\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \lambda^4$. Quindi esiste un unico autovalore di A:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 4$;

Per determinare la molteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.
Analizzando la matrice $(A - 0Id) = A$ si vede che la IVcolonna = I colonna, la II riga= III riga. Ai fini del rango si ha

$$\mathrm{r}k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{r}k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

poichè il determinante di quest' ultima matrice è nullo ed esistono due colonne linearmente indipendenti.
Quindi $\mathrm{r}k(A) = 2$. Pertanto si ha $m.g.(0) = 4 - \mathrm{r}k(A) = 2$.

(ii) Per determinare gli autovalori dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 - x_4 & = 0 \\ \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = x_4 & = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo che che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad : \quad (t,s) \neq (0,0) \right\}.$$

(iii) Per dimostrare che $Ker(f) = Im(f)$ prima di tutto confrontiamo le loro dimensioni. Abbiamo visto nei punti precedenti che $\mathrm{r}kA = \dim(Im(f)) = 2$ e che $\dim(Ker(f)) = 4 - 2$.

Poichè i due spazi hanno la stessa dimensione è sufficiente verificare che $Im(f) \subseteq Ker(f)$. L'asserto segue se dimostriamo che i vettori di una base di $Im(f)$ appartengono a $Ker(f)$.

Per ottenere una base di $Im(f)$ consideriamo i primi due vettori della matrice che sono tra loro lin. ind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \; v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ora $v_1 \in Ker(f)$ se e soltanto se $A \cdot v_1 = 0_V$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essendo verificata l'uguaglianza concludiamo che $v_1 \in Ker(f)$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per v_2 si vede che $A \cdot v_2 = 0_V$ e quindi anche $v_2 \in Ker(f)$.

La tesi è quindi dimostrata.