Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 13/06/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) | Marco (Nome) | (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{3} + 3i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

$\dim(W + Z) = \boxed{3}$ Determinare una base di $W \cap Z$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{5}$ $\mathrm{rg}(A) = \boxed{1}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | ~~falso~~ |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$\cancel{A_1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Traccia sol. 13-6-2012

1. $$\begin{cases} z^3 = -|z|^2 \cdot \bar{z} \\ |e^z| = e \end{cases}$$

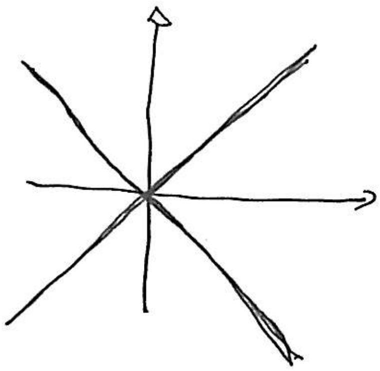
(i) $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\qquad z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta}$

$|z| = \rho$ $\qquad -1 = e^{i\pi}$

$\bar{z} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

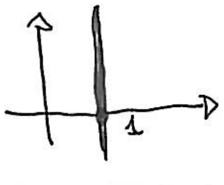
$$\Rightarrow \quad z^3 = -|z|^2 \cdot \bar{z} \iff \begin{cases} \rho^3 = \rho^3 & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 3\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ qualsiasi} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$



(ii) $$|e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x$$

$$|e^z| = e \iff \begin{cases} e^x = e \\ y \text{ qualsiasi} \end{cases} \iff \begin{matrix} x = 1 \\ y \text{ qualsiasi} \end{matrix}$$

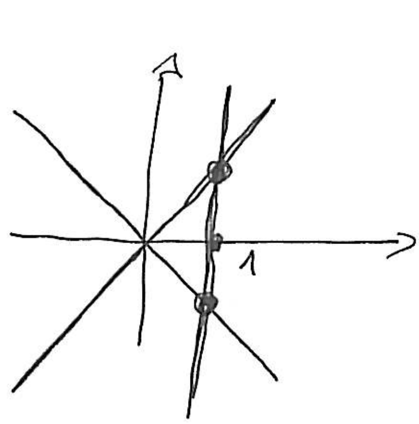


Soluzione sistema:

(i) $\Leftrightarrow \quad z = \rho \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$

$= \rho \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(ii) $\quad z = 1 + iy$



Conclusione: $\quad z_1 = 1+i$

$z_2 = 1-i$

---

(2) $\quad A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 2 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = -t^2 + 4t - 4 = -(t-2)^2$

$\det(A_t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

- Per $t \neq 2 \quad rg(A_t) = 3$

$\dim(\ker(\mathcal{L}_{A_t})) = 0$

$t=2 \quad A_{t=2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 0, \ \det(M) \neq 0 \Rightarrow rg(A_t) = 2$; $\dim \ker = 1$

$$A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Rouché - Capelli

$\exists$ soluzione $\iff$ $rg(A_t) = rg(A_t \vdots b)$

$rg(A_t) = 3$ se $t \neq 2$

Quindi se $t \neq 2$

$$rg(A_t) = 3 \leq rg(A_t \vdots b) \leq 3$$

Si ha $=$ quindi $\exists$ (UNICA) soluzione perché $rk = 3 = \#$ incognite

Se $t = 2$

$rg(A_{t=2}) = 2$ $\quad (A_{t=2} \vdots b) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot$ II colonna

$\Rightarrow rg(A_{t=2} \vdots b) = rg(A_{t=2}) = 2$

$\Rightarrow$ Per $t = 2$ $\exists$ soluzione . N.B. $\exists$ ∞ soluzioni

$\dim\{\text{soluzioni}\} = 3 - 2 = 1$

$$W = \{ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

$$\dim(W) = 2$$

$$W \oplus \mathrm{Ker}(f_{A_t}) = \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} \text{i)} \dim \mathrm{Ker}(f_{A_t}) = 1 \\ \text{ii)} \mathrm{Ker}(f_{A_t}) \cap W = \{0_V\} \end{cases}$$

i) verificata per $t = 2$

ii) Posto $t = 2$:

$$\mathrm{Ker}(f_{A_t}) \iff A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ $\longleftarrow$ inutile perché $rg(A_t) = 2$

Sol: $x_3 = t$
$x_2 = -t$
$x_1 = t$

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{BASE Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W \cap \mathrm{Ker} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff -t - t + t = 0$$

$$\iff t = 0$$

cioè $W \cap \mathrm{Ker} = \{0_V\}$

③ $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

Poniamo

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff A \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 1 - 2 + a = 0 \\ -2 + b = 0 \\ -2 + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

CONCLUSIONE

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i)

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \dots = \lambda^4$$

UNICO AUTOVALORE : $\lambda_0 = 0$ $\quad$ m.a. $= 4$

$$m.g.(0) = 4 - rg(A) = 1$$

poiché $rg(A) = 3$ in quanto $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

ii) AUTOVETTORI:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = t \text{ qualsiesi} \end{cases}$$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda_0 = 0$: $\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \neq 0 \right\}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = \lambda^4$ autovalori: $\lambda_0 = 0$

m.a. $= 4$

m.g. $= 4-2 = 2$

N.B. In generale

se λ_0 è autovalore per A

allora

$(\lambda_0)^2$ è autovalore per A^2