Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria [ ]

Prova scritta del 20/01/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1 + 4i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} : $\boxed{\frac{1}{17} - i\frac{4}{17}}$

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

vero | ~~falso~~

• Determinare una base di $W \cap Z$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{5} \quad rg(A) = \boxed{1}$

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{1}$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ | falso

• Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$\cancel{A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{cases} (z-3)^4 = 4(\bar{z}-3)^2 \\ |e^{iz}| < 1 \end{cases}$

I eq: $w = z-3$ $\qquad z = w+3$

$\bar{w} = \bar{z} - 3$

$I \Leftrightarrow \quad w^4 = 4\bar{w}^2$

$w = \rho e^{i\vartheta} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \rho^4 = 4\rho^2 \\ 4\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi \end{cases}$

sol. distinte:

$w_0 = 2$ $\qquad z_0 = 5$

$w_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad z_1 = 4 + i\sqrt{3}$

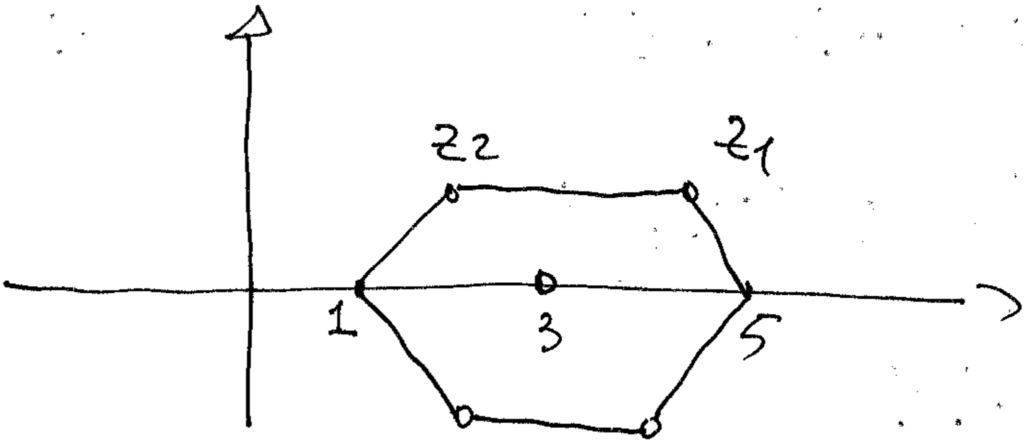
$w_2 = -1 + i\sqrt{3}$ $\qquad z_2 = 2 + i\sqrt{3}$

$w_3 = -2$ $\longrightarrow$ $z_3 = 1$

$w_4 = -1 - i\sqrt{3}$ $\qquad z_4 = 2 - i\sqrt{3}$

$w_5 = 1 - i\sqrt{3}$ $\qquad z_5 = 4 - i\sqrt{3}$

$w_6 = 0$ $\qquad z_6 = 3$



II:

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = \underbrace{|e^{ix}|}_{=1} \cdot e^{-y}$$

$$= e^{-y}$$

Quindi $|e^{iz}| < 1 \iff \begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y > 0 \end{cases}$

Sol sistema: z_1, z_2

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\boxed{\underline{A}\ 4\times3} \Rightarrow rk(A) \leq 3$

Preso $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(M) \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} rk(A) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 3-3 = 0 \end{cases}$

ii) $(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4×4

$\det(A \vdots b) = -2t + 2$

Quindi:

se $t \neq 1 \Rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow rg(A \vdots b) = 4$

$4 > 3 \geq rg(A) \Rightarrow$ NON $\exists$ SOL.

$t = 1$

$\det(A \vdots b) = 0 \Rightarrow rg(A \vdots b) \leq 3$

$3 \geq rg(A \vdots b) \geq rg(A) = 3$

$\Rightarrow rg = rg$

$\Rightarrow \exists$ unica SOL.

(iii) $W = \{ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \} \subset \mathbb{R}^4$

$\dim(W) = 3$

Tesi: $W = Im(\mathcal{L}_A)$

$$Im(\mathcal{L}_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

cioè: $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = \alpha + 3\gamma \\ x_4 = 2\beta \end{cases}$

Sostituiamo nell'eq. di W: (5)

$$(\alpha+\beta+2\gamma)+(\beta+\gamma)-(\alpha+3\gamma)-2\beta=0$$

$$0=0$$

Vera $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

CIOE' $\operatorname{Im}(\mathcal{L}_A) \subseteq W$

Ma $\dim(\operatorname{Im}(\mathcal{L}_A)) = 3 = \dim(W)$

quindi i due sottospazi vettoriali coincidono

③ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad$ $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

A matrice associata ad f $\quad$ $\underline{2 \times 3}$

$\mathrm{rg}(A) = 1 \qquad \mathrm{Im} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \beta = 0 \\ 2 + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \alpha = 0 \\ 4 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

conclusione: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_A(\lambda) = \lambda^4$

$\lambda = 0$ autovalore $\quad m.e. = 2$

$m.g.(0) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_A)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 2$

iii) A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile

ii) Autospazio $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

iv) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

MATRICE NULLA

A^2 è DIAGONALE!