Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 13/06/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{3} + 3i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

$\dim(W + Z) =$

Determinare una base di $W \cap Z$:

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \implies \quad \dim(Ker(l_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$$

- $$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = -|z|^2 \cdot \overline{z} \\ |e^z| = e \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 2 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-7] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii)Determinare gli autovalori di A^2.