Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 18/2/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -2i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- $z = -2i \implies z^3 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \implies \dim(W+Z) = \boxed{}$$

Determinare una base di W:

$\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \implies m.g.(3) = \boxed{}$

- A matrice $k \times n$, B matrice $n \times p \implies (A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ | vero | falso |

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ e^z = \frac{1}{e^{2\pi}} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -t \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = Im(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}; \quad Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Calcolare A^2 e dire se A^2 è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 18/2/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 3i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

- $z = 3i \quad \Longrightarrow \quad z^3 =$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \,,\; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Longrightarrow \dim(W+Z) =$$

Determinare una base di W:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = \qquad \dim(Ker(l_A)) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow m.g.(3) =$

- A matrice $k \times n$, B matrice $n \times p \Longrightarrow (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ | vero | falso |

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} :

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ e^z = e^{2\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = Im(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}; \quad Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Calcolare A^2 e dire se A^2 è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.