

Compitino n.2 9/2/2009
 TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 risposta sbagliata = -2
 calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A matrice 2×2 , $\Rightarrow \det(3A) = 3 \cdot \det(A)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Esiste $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \right\}, Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ allora si ha : } \boxed{\mathbb{R}^3 = W \oplus Z} \quad \begin{matrix} \text{Vera} & \text{Falsa} \end{matrix}$$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

- Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia l_A è l'applicazione lineare $l_A : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $X \mapsto A \cdot X$.

La dimensione di $Ker(l_A)$ è =

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1.[punteggio: 0-7]

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +tx_2 & +x_3 \\ tx_1 & +x_2 & -tx_3 \\ x_1 & +tx_2 & +2x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $\text{Ker}(f_t)$ e la dimensione di $\text{Im}(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio di \mathbb{R}^3 $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Z \oplus \text{Ker}(f_t)$

Esercizio 2.[punteggio: 0-3]

Determinare la matrice A , associata rispetto alle basi canoniche all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- (i) Esiste una matrice B 2×2 , $B \neq \mathbf{0}$, tale che $A \cdot B = \mathbf{Id}$ (dove $\mathbf{0}$ è la matrice nulla e \mathbf{Id} è la matrice identità) ?
(ii) Esiste una matrice B 2×2 , $B \neq \mathbf{0}$, tale che $A \cdot B = \mathbf{0}$ (dove $\mathbf{0}$ è la matrice nulla) ?

Esercizio 4. [punteggio: 0-2] Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{-1}

Esercizio 5.[punteggio: 0-3] Sia A una matrice 3×2 e B una matrice 2×3 .
Dimostrare che $\text{rk}(A \cdot B) \leq 2$.