Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2005/2006

Compitino n.2 19/12/2005

TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 risposta sbagliata = -2

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim(Ker\ (f)) = 2 \Rightarrow rk(f) = 3$.	☐	☐
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	☐	☐
A matrice 3×3 a coeff. reali , $\det(A^3) = (\det(A))^3$	☐	☐
Si consideri il *sistema lineare* $A \cdot X = b$, dove A è una matrice quadrata $n \times n$, X il vettore delle ingognite, b il vettore termine noto. Allora: il sisteme ammette un'unica soluzione $\iff \det A \neq 0$	☐	☐

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\implies$ il coefficiente di posto $(2,1)$ della matrice $A \cdot B$ è : = $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 6 è = $\boxed{}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

- **Esercizio 1. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 \\ 4x_1 & +6x_2 & +tx_3 \\ x_1 & +tx_2 & \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$,

Determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

- **Esercizio 2. [punteggio: 0-4]**

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

- **Esercizio 3. [punteggio: 0-7]** Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) [**2 punti**] Dimostrare che A è diagonalizzabile

(ii) [**2 punti**] Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile

(iii)[**3 punti**] Dimostare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n$ è diagonalizzabile