Ingegneria Gestionale — Corso di Algebra — anno accademico 2003/2004

prova scritta del 16-01-2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{z} = (2 + i2\sqrt{3}) \cdot e^{2\overline{z}} \\ |z - 4i| > |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 - tx_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ tx_1 + tx_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Si determini per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \}$,

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Ker(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si determini un insieme costituito da 3 autovettori per f linearmente independenti e lo si completi ad una base di $\mathbb{R}^4$.